TUGAS AKHIR - SM141501

OPERATOR LINEAR KONTINU TERBATAS PADA RUANG BERNORMA CONE $C'[a, b]$ KE $C[a, b]$

AGUS NUR AHMAD SYARIFUDIN
NRP 1211100042

Dosen Pembimbing:
Sunarsini, S.Si, M.Si
Drs. Sadjidon, M.Si

JURUSAN MATEMATIKA
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2015

FINAL PROJECT - SM141501

BOUNDED CONTINUOUS LINEAR OPERATOR ON $C'[a,b]$ CONE NORMED SPACE TO $C[a,b]$

AGUS NUR AHMAD SYARIFUDIN
NRP 1211100042

Supervisors:
Sunarsini, S.Si, M.Si
Drs. Sadjidon, M.Si

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
Faculty of Mathematics and Natural Sciences
Sepuluh Nopember Institute of Technology
Surabaya 2015

LEMBAR PENGESAHAN

OPERATOR LINEAR KONTINU TERBATAS PADA RUANG BERNORMA CONE $C^n[a,b]$ KE $C[a,b]$

BOUNDED CONTINUOUS LINEAR OPERATOR ON $C^n[a,b]$ CONE NORMED SPACE TO $C[a,b]$

Diajukan Untuk Memenuhi Salah Satu Syarat
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
pada
Bidang Studi Analisis dan Aljabar
Program Studi S-1 Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

Oleh:
AGUS NUR AHMAD SYARIFUDIN
NRP. 1211 100 042

Menyetujui,

Dosen Pembimbing II,	Dosen Pembimbing I,
Drs. Sadjidon, M.Si	Sunarsini, S.Si, M.Si
NIP. 19630909 198903 1 005	NIP. 19691004 199402 2 001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
FMIPA ITS

Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si
NIP. 19660414 199102 2 001

Surabaya, Juli 2015

OPERATOR LINEAR KONTINU TERBATAS PADA RUANG BERNORMA CONE $C'[a, b]$ KE $C[a, b]$

Nama Mahasiswa	:	Agus Nur Ahmad Syarifudin
NRP	:	1211 100 042
Jurusan	:	Matematika FMIPA-ITS
Pembimbing	:	1. Sunarsini, S.Si, M.Si
		2. Drs. Sadjidon, M.Si

Abstrak

Ruang bernorma cone merupakan perluasan dari ruang bernorma. Perbedaan keduanya terletak pada kodomain fungsi tersebut. Pada fungsi norma, kodomain yang digunakan adalah $\mathbb{R}$ *tetapi pada fungsi norma cone kodomain yang digunakan adalah sebarang ruang Banach* E. *Salah satu pembahasan yang menarik untuk dikaji dari ruang bernorma cone adalah operator linear sebab penelitian mengenai operator linear dalam ruang bernorma cone belum banyak dilakukan. Oleh karena itu, dalam tugas akhir ini diselidiki mengenai sifat kekontinuan dan keterbatasan operator linear pada ruang bernorma cone, khususnya operator linear pada ruang bernorma cone* $C'[a, b]$ *ke* $C[a, b]$. *Demikian pula, diperoleh bahwa ruang operator linear terbatas pada ruang bernorma cone* $C'[a, b]$ *ke* $C[a, b]$ *merupakan ruang Banach cone.*

Kata-kunci: *Ruang Banach, Ruang Bernorma, Ruang Bernorma Cone, Operator Linear*

"Halaman ini sengaja dikosongkan."

BOUNDED CONTINUOUS LINEAR OPERATOR ON $C'[a,b]$ CONE NORMED SPACE TO $C[a,b]$

Name	:	Agus Nur Ahmad Syarifudin
NRP	:	1211100042
Department	:	Mathematics FMIPA-ITS
Supervisors	:	1. Sunarsini, S.Si, M.Si
		2. Drs. Sadjidon, M.Si

Abstract

Cone normed space is a generalization of normed space. The difference between them is on their codomain's function. On norm function, $\mathbb{R}$ is used as its codomain while cone norm function uses any Banach space E. One of the interesting topic of cone normed space is linear operator because of its infrequently in researches. Therefore, in this final project we investigated the boundedness and continuity properties of linear operator on cone normed space, especially a linear operator on $C'[a,b]$ cone normed space to $C[a,b]$. Moreover, we obtained that the bounded linear operators space on $C'[a,b]$ cone normed space to $C[a,b]$ is a Banach cone space.

Keywords: *Banach Space, Normed Space, Cone Normed Space, Linear Operator*

"Halaman ini sengaja dikosongkan."

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warohmatulloohi Wabaarokatuh.

Alhamdulillaahirobbil'aalamiin, segala puji dan syukur penulis panjatkan kehadirat Allah Subhaanahu Wa Ta'aala yang telah memberikan limpahan rahmat, petunjuk serta hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir yang berjudul

"OPERATOR LINEAR KONTINU TERBATAS PADA RUANG BERNORMA CONE $C'[a, b]$ KE $C[a, b]$"

sebagai salah satu syarat kelulusan Program Sarjana Jurusan Matematika FMIPA Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) Surabaya.

Tugas akhir ini dapat terselesaikan dengan baik berkat bantuan dan dukungan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan ucapan terima kasih dan penghargaan kepada:

1. Ibu Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si selaku Ketua Jurusan Matematika ITS dan dosen penguji.

2. Ibu Sunarsini, S.Si, M.Si dan bapak Drs. Sadjidon, M.Si selaku dosen pembimbing atas segala bimbingan dan motivasinya kepada penulis dalam mengerjakan tugas akhir ini sehingga dapat terselesaikan dengan baik.

3. Ibu Soleha, S.Si, M.Si selaku penguji atas semua saran yang telah diberikan demi perbaikan tugas akhir ini.

4. Bapak Dr. Chairul Imron, MI.Komp. selaku koordinator tugas akhir dan Mas Ali yang selalu memberikan informasi mengenai tugas akhir.

5. Bapak Drs. Daryono Budi Utomo, M.Si selaku dosen wali yang telah memberikan arahan akademik selama penulis menempuh pendidikan di Jurusan Matematika FMIPA ITS.

6. Bapak dan Ibu dosen serta para staf Jurusan Matematika ITS yang tidak dapat penulis sebutkan satu-persatu.

Penulis juga menyadari bahwa dalam tugas akhir ini masih terdapat kekurangan. Oleh sebab itu, kritik dan saran yang bersifat membangun sangat penulis harapkan demi kesempurnaan tugas akhir ini. Akhirnya, penulis berharap semoga tugas akhir ini dapat bermanfaat bagi banyak pihak.

Surabaya, Juli 2015

Penulis

Special Thank's To

Penyelesaian penulisan tugas akhir ini tidak lepas dari orang-orang terdekat penulis. Oleh sebab itu, penulis mengucapkan terima kasih kepada :

1. Ayah dan ibu penulis yang selalu memberikan doa dan dukungan dalam pendidikan yang ditempuh oleh penulis.
2. Dr. Maryam Ramezani selaku penulis paper *Cone Normed Space* yang telah memberi bantuan penulis dalam memahami tulisan beliau serta sebagai teman diskusi dalam penyelesaian tugas akhir ini.
3. Andika, Musa, Virama yang senantiasa menemani dan menjadi sahabat selama kuliah di ITS.
4. Jamil yang selalu menjadi teman diskusi selama di ITS.
5. BPH IM 13-14 terutama Singgih, Dyna, Ebi, Susi, Dini dan keluarga besar IM 13-14 yang lainnya.
6. Teman-teman seperjuangan tugas akhir Jijong, Agyl, Reza, Vimala, Eni, Linda, Mardiana, dan lain-lain.
7. Mas Fahim dan Mas Rizky yang telah meluangkan waktunya untuk diajak diskusi dalam menyelesaikan tugas akhir ini.
8. Matematika angkatan 2011 yang sudah menjadi keluarga baru selama kuliah di ITS.
9. Semua pihak yang tak bisa penulis sebutkan satu-persatu, terima kasih telah membantu sampai terselesaikannya tugas akhir ini.

"Halaman ini sengaja dikosongkan."

DAFTAR ISI

Daftar Simbol

$B[a,b]$	Ruang fungsi terbatas pada $[a,b]$
$\widetilde{B}(C'[a,b],C[a,b])$	Ruang operator linear terbatas cone pada ruang bernorma cone $C'[a,b]$ ke $C[a,b]$
$B(c,\varepsilon)$	Bola terbuka dengan pusat c dan jari-jari ε dalam ruang bernorma
$B_\varepsilon(c)$	Bola terbuka dengan pusat c dan jari-jari ε dalam ruang bernorma cone
$C[a,b]$	Ruang fungsi kontinu pada $[a,b]$
$C'[a,b]$	Ruang fungsi terdifferensial yang kontinu pada $[a,b]$
ℓ^p	Ruang barisan yang jumlahan absolut nilai-nilai barisannya pangkat p konvergen
ℓ^1	Ruang barisan yang jumlahan absolut nilai-nilai barisannya konvergen
sup	Supremum (batas atas terkecil)
$\|\cdot\|_X$	Norma pada X
$\|\cdot\|_X^E$	Norma cone pada X bernilai E
$\|\cdot\|_{\ell^1}$	Norma baku pada ℓ^1
$\|\cdot\|_\infty$	Norma supremum
$\|\cdot\|_{C'}$	Norma pada $C'[a,b]$
$\|\cdot\|_{C'}^{\ell^1}$	Norma cone pada $C'[a,b]$ bernilai ℓ^1
$\|\cdot\|_{C}^{\ell^1}$	Norma cone pada $C[a,b]$ bernilai ℓ^1
$\|\cdot\|_{\widetilde{B}}^{\ell^1}$	Norma cone pada $\widetilde{B}(C'[a,b],C[a,b])$ bernilai ℓ^1
P_E	Himpunan cone dari ruang Banach E
P_{ℓ^1}	Himpunan cone dari ℓ^1
$intE$	Interior E
$intP_{\ell^1}$	Interior dari cone P_{ℓ^1}
$f_n \rightrightarrows f$	Barisan f_n konvergen seragam ke f
$T_{\mathcal{H}}$	Operator linear kontinu terbatas pada ruang bernorma cone $C'[a,b]$ ke $C[a,b]$

"Halaman ini sengaja dikosongkan."

DAFTAR PUSTAKA

[1] Long-Guang, H., dan Xian, Z. 2007. "Cone Metric Spaces and Fixed Point Theorems of Contractive Mappings". **Journal of Mathematical Analysis and Application** 332, 1468-1476.

[2] Gordji, M. Eshaghi, dkk. Dec 2009. **Cone Normed Spaces**, <URL:http://arxiv.org/pdf/0912.0960v1.pdf> diakses pada 7 Januari 2015.

[3] Kreyszig, E. 1978. **Introductory Functional Analysis with Applications**. New York: John Wiley & Sons. Inc.

[4] Darmawan, R. 2013. **Konstruksi Norma Cone pada Ruang ℓ^p ke Ruang $C[a,b]$**. Tugas Akhir Jurusan Matematika ITS.

[5] Murti, H. Grestika. 2013. **Teorema Titik Tetap pada Ruang Bernorma Cone $\mathbb{R}$ Bernilai $\mathbb{R}^2$**. Tugas Akhir Jurusan Matematika ITS.

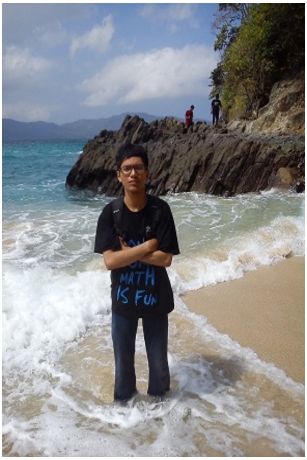
[6] Yunus, M. 2005. **Modul Ajar Pengantar Analisis Fungsional**. Surabaya: Jurusan Matematika ITS.

[7] Gamchi, S. Shamsi, dkk. 2014. "Some Results on TVS-cone Normed Spaces and Algebraic Cone Metric Spaces". **Iranian Journal of Mathematical Sciences and Informatics** 9, 1:71-80.

[8] Bartle, R.G., dan Sherbert, D.R. 2011. **Introduction to Real Analysis**. John Wiley & Sons. Inc.

[9] Tropp, J.A. 2000. **The Cone Theorem**, <URL:http://users.cms.caltech.edu/~jtropp/notes/Tro00-Cone-Theorem.pdf> diakses pada 24 Maret 2015.

LAMPIRAN
Biodata Penulis



Penulis memiliki nama lengkap Agus Nur Ahmad Syarifudin, lahir di Surabaya, 10 Agustus 1993. Terlahir sebagai anak pertama dari 3 bersaudara. Sejak usia dini penulis telah menempuh pendidikan formal dimulai dari TK Rahmat Surabaya (1997-1999), SDN Dr. Soetomo VI Surabaya (1999-2005), SMP Negeri 1 Surabaya (2005-2008), dan SMA Negeri 2 Surabaya (2008-2011). Setelah lulus dari SMA, penulis melanjutkan studi ke jenjang S1 di Jurusan Matematika ITS Surabaya melalui jalur SNMPTN Undangan dengan NRP 1211 100 042. Di Jurusan Matematika, awalnya penulis mengambil Bidang Minat Pemodelan dan Simulasi Sistem. Namun, pada akhir semester VII penulis beralih ke Bidang Analisis dan Aljabar. Selama menempuh pendidikan di ITS, penulis juga aktif berorganisasi di Lembaga Dakwah Jurusan Matematika ITS, Ibnu Muqlah sebagai staf Departemen Syiar (2012-2013) dan Kepala Departemen Mentoring (2013-2014). Disamping itu, sejak semester V penulis terdaftar sebagai asisten dosen matakuliah kalkukus I dan kalulus II.

Adapun untuk informasi lebih lanjut mengenai tugas akhir ini dapat ditujukan ke penulis melalui email gonski2@gmail.com

BAB I
PENDAHULUAN

Pada bab ini akan diuraikan hal-hal yang melatarbelakangi tugas akhir ini yang selanjutnya dituliskan dalam sub perumusan masalah. Dalam bab ini juga dicantumkan mengenai batasan masalah, tujuan dan manfaat dari tugas akhir ini. Adapun sistematika penulisan tugas akhir diuraikan pada bagian akhir bab ini.

1.1 Latar Belakang

Analisis fungsional merupakan salah satu cabang dari matematika analisis. Inti dari analisis fungsional adalah mempelajari tentang ruang vektor disertai dengan fungsi-fungsi khusus seperti norma, operator, hasil kali dalam, dan lain-lain. Adapun konsep umum yang dibahas dalam analisis fungsional diantaranya ruang metrik, ruang bernorma, ruang Banach, ruang hasil kali dalam, dan ruang Hilbert.

Seiring berkembangnya zaman, pembahasan dalam analisis fungsional pun mulai berkembang. Pada umumnya perkembangan penelitian dalam bidang analisis fungsional dewasa ini berpusat pada perumuman ruang metrik dan ruang bernorma serta pengembangan teorema titik tetap pada ruang-ruang tertentu. Hal ini dapat dilihat bahwa pada [1] yang memperkenalkan ruang metrik cone dan menyelidiki beberapa teorema titik tetap dari pemetaan kontraktif. Demikian pula, pada [2] diperkenalkan konsep ruang bernorma cone. Pada hakikatnya ruang bernorma cone adalah perluasan dari ruang bernorma. Perbedaan keduanya terletak pada kodomain fungsi tersebut. Pada fungsi norma, kodomain yang digunakan adalah $\mathbb{R}$ tetapi pada fungsi norma cone kodomain yang digunakan adalah sebarang ruang Banach E. Telah diketahui dari [3] bahwa $\mathbb{R}$ adalah ruang Banach. Jadi, dapat dikatakan bahwa ruang bernorma cone adalah perluasan dari ruang bernorma.

Penelitian mengenai ruang bernorma cone telah dilakukan oleh Darmawan dan Hajar dalam [4] dan [5]. Darmawan menyelidiki tentang bentuk norma cone yang bernilai $C[a, b]$ pada ruang ℓ^p yang kemudian pasangan ruang vektor ℓ^p dan norma cone tersebut merupakan ruang bernorma cone. Berbeda dengan Darmawan, norma cone yang didefinisikan oleh Hajar merupakan pemetaan dari ruang vektor $\mathbb{R}$ ke ruang Banach $\mathbb{R}^2$. Dalam penelitiannya, Hajar telah menyelidiki tentang teorema titik tetap pada ruang bernoma cone $\mathbb{R}$ bernilai $\mathbb{R}^2$.

Umumnya, dalam [3,6] pembahasan mengenai ruang bernorma selalu disertai dengan operator linear pada ruang tersebut. Sayangnya, penelitian mengenai operator linear pada ruang bernorma cone belum banyak dilakukan, termasuk penelitian yang dilakukan oleh Darmawan dan Hajar. Dalam tugas akhir ini, akan diselidiki sifat kekontinuan dan keterbatasan operator linear dari ruang bernorma cone, khususnya operator linear pada ruang bernorma cone $C'[a, b]$ ke $C[a, b]$. Adapun pemilihan operator linear pada ruang bernorma cone $C'[a, b]$ ke $C[a, b]$ dalam tugas akhir ini didasari oleh [7]. Lebih lanjut, dalam tugas akhir ini akan diteliti mengenai sifat-sifat ruang operator linear terbatas pada ruang bernorma cone $C'[a, b]$ ke $C[a, b]$.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan sebelumnya dibuatlah suatu rumusan masalah yang akan dibahas dalam tugas akhir ini, yaitu

1. Bagaimanakah sifat kekontinuan dan keterbatasan operator linear pada ruang bernorma cone $C'[a, b]$ ke $C[a, b]$.
2. Bagaimanakah sifat-sifat ruang operator linear terbatas pada ruang bernorma cone $C'[a, b]$ ke $C[a, b]$.

1.3 Batasan Masalah

Dalam pengerjaan tugas akhir ini diberikan suatu batasan masalah, yaitu ruang vektor $C'[a, b]$ dan $C[a, b]$ yang dipilih diasumsikan *field* (lapangan) yang digunakan adalah $\mathbb{R}$ serta norma cone yang digunakan didefinisikan pada ruang Banach ℓ^1.

1.4 Tujuan

Tujuan dari tugas akhir ini adalah

1. Menyelidiki sifat keterbatasan dan kekontinuan operator linear pada ruang bernorma cone $C'[a, b]$ ke $C[a, b]$.
2. Menyelidiki sifat-sifat ruang operator linear terbatas pada ruang bernorma cone $C'[a, b]$ ke $C[a, b]$.

1.5 Manfaat

Manfaat dari tugas akhir ini adalah sebagai wawasan tambahan dalam konsep ruang bernorma cone terutama operator linear kontinu terbatas pada ruang bernorma cone.

1.6 Sistematika Penulisan

Penulisan tugas akhir ini disusun dalam lima bab, yaitu:

1. BAB I PENDAHULUAN
   Bab ini berisi tentang gambaran umum dari penulisan tugas akhir yang meliputi latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan, manfaat, dan sistematika penulisan.

2. BAB II TINJAUAN PUSTAKA
   Pada Bab II berisikan konsep-konsep dasar yang digunakan dalam menyelidiki sifat kekontinuan dan keterbatasan operator linear pada ruang bernorma cone $C'[a, b]$ ke $C[a, b]$ serta sifat-sifat ruang operator linear terbatas pada ruang bernorma cone $C'[a, b]$ ke $C[a, b]$, yaitu ruang vektor, ruang bernorma, ruang Banach, himpunan cone serta sifat-sifatnya, ruang bernorma cone dan beberapa sifatnya serta konsep operator linear pada ruang bernorma cone.

3. BAB III METODE PENELITIAN
   Dalam bab ini dijelaskan tahapan-tahapan yang dilakukan dalam pengerjaan tugas akhir. Tahapan-tahapan tersebut antara lain studi literatur, mengkaji ruang Banach ℓ^1 serta ruang bernorma cone $C'[a, b]$ dan $C[a, b]$, menyelidiki sifat keterbatasan dan kekontinuan operator linear pada ruang bernorma cone $C'[a, b]$ ke $C[a, b]$ serta sifat-sifat ruang operator linear terbatas pada ruang bernorma cone $C'[a, b]$ ke $C[a, b]$, dan penarikan kesimpulan.

4. BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN
   Pada Bab IV dibahas mengenai ruang ℓ^1, ruang $C[a, b]$, ruang $C'[a, b]$, himpunan cone dari ruang Banach ℓ^1, ruang bernorma cone $C'[a, b]$ bernilai ℓ^1, ruang bernorma cone $C[a, b]$ bernilai ℓ^1. Selanjutnya akan dibahas mengenai sifat kekontinuan dan keterbatasan operator linear pada ruang bernorma cone $C'[a, b]$ ke $C[a, b]$ serta sifat-sifat ruang operator linear terbatas pada ruang bernorma cone $C'[a, b]$ ke $C[a, b]$.

5. BAB V PENUTUP
   Bab ini berisi kesimpulan tugas akhir yang diperoleh dari bab pembahasan serta saran untuk pengembangan penelitian selanjutnya.

"Halaman ini sengaja dikosongkan."

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini dijelaskan mengenai konsep atau teori dasar yang digunakan dalam menyelidiki sifat kekontinuan dan keterbatasan operator linear pada ruang bernorma cone $C'[a,b]$ ke $C[a,b]$. Konsep-konsep dasar tersebut adalah ruang vektor, ruang bernorma, ruang Banach, cone serta sifat-sifatnya, ruang bernorma cone, dan operator linear kontinu terbatas pada ruang bernorma cone.

2.1 Ruang Vektor

Pembahasan mengenai operator linear selalu berkaitan dengan ruang vektor. Oleh karena itu, pemahaman mengenai konsep dasar ruang vektor sangat diperlukan, baik berupa definisi maupun sifat-sifatnya. Pada bagian ini, akan dijelaskan mengenai konsep dasar dari ruang vektor.

Definisi 2.1.1. [6] *Ruang vektor atas $\mathbb{F}$ adalah himpunan tak kosong V disertai dua fungsi, satu dari $V \times V$ ke V dan yang satunya dari $\mathbb{F} \times V$ ke V, yang berturut-turut dinotasikan dengan $x + y$ dan αx, untuk semua $x, y \in V$ dan $\alpha \in \mathbb{F}$, sedemikian hingga untuk sebarang $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ dan $x, y, z \in V$, berlaku*

(V1) $x + y = y + x, \quad (x + y) + z = x + (y + z)$

(V2) *Terdapat* $\mathbf{0} \in V$ *sehingga* $x + \mathbf{0} = x$

(V3) *Untuk setiap* $x \in V$ *terdapat* $-x \in V$ *sedemikian hingga* $x + (-x) = \mathbf{0}$

(V4) $1x = x, \quad \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$

(V5) $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y, \quad (\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x.$

Jika $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ maka V disebut ruang vektor real dan jika $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ maka V disebut ruang vektor kompleks. Unsur-unsur dari $\mathbb{F}$ disebut skalar, sedangkan unsur-unsur dari V disebut vektor. Operasi $x+y$ disebut jumlahan vektor dan operasi αx disebut perkalian dengan skalar.

Contoh 2.1.2. [3] Diberikan himpunan ℓ^∞ adalah himpunan semua barisan bilangan tak hingga bernilai real yang terbatas. Elemen dari ℓ^∞ dinotasikan dalam bentuk $\bar{x} = (x_i) = (x_1, x_2, \ldots)$ sedemikian hingga $|x_i| \leq M, \ \forall i \in \mathbb{N}$ dengan $x_i, M \in \mathbb{R}$ dan $M > 0$. Himpunan ℓ^∞ adalah ruang vektor atas $\mathbb{R}$ dengan operasi jumlahan vektor dan perkalian skalar yang didefinisikan untuk setiap $\bar{x}, \bar{y} \in \ell^\infty$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \bar{x} + \bar{y} &:= (x_i) + (y_i) = (x_i + y_i) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots) \\ \alpha \bar{x} &:= \alpha(x_i) = (\alpha x_i) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots) \end{aligned}$$

untuk setiap $i \in \mathbb{N}$.

Contoh 2.1.3. [3] Pandang himpunan $B[a,b]$ dari semua fungsi terbatas bernilai real yang terdefinisi pada selang $[a,b]$. Himpunan $B[a,b]$ juga merupakan ruang vektor atas $\mathbb{R}$ dengan operasi penjumlahan vektor dan perkalian skalar yang didefinisikan untuk setiap $f, g \in B[a,b]$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f + g &:= (f+g)(t) = f(t) + g(t), & \forall t \in [a,b] \\ \alpha f &:= (\alpha f)(t) = \alpha f(t), & \forall t \in [a,b]. \end{aligned}$$

Sebagai catatan, untuk vektor (elemen) nol di ℓ^∞ adalah barisan nol $\bar{0} = (0, 0, \ldots)$ sedangkan vektor nol di $B[a,b]$ adalah fungsi θ yang didefinisikan sebagai $\theta(t) = 0, \ \forall t \in [a,b]$.

Untuk sebarang ruang vektor, berlaku teorema berikut ini:

Teorema 2.1.4. [3] *Misalkan V adalah ruang vektor atas field $\mathbb{F}$, $\forall x \in V$ dan $\alpha \in \mathbb{F}$ berlaku*

(a) $0x = \mathbf{0}_V$

(b) $\alpha\mathbf{0}_V = \mathbf{0}_V$

(c) $(-1)x = -x$.

Umumnya pembahasan ruang vektor selalu disertai dengan subruang linear dan untuk menunjukkan suatu himpunan merupakan ruang vektor biasanya digunakan konsep subruang linear. Adapun definisi dari subruang linear adalah sebagai berikut:

Definisi 2.1.5. [6] *Misalkan V suatu ruang vektor atas $\mathbb{F}$. Suatu himpunan tak kosong $U \subset V$ adalah subruang linear dari V jika U adalah ruang vektor dengan jumlahan vektor dan perkalian dengan skalar seperti di V. Hal ini ekivalen dengan berlakunya syarat bahwa*

$$\alpha x + \beta y \in U \text{ untuk semua } \alpha, \beta \in \mathbb{F} \text{ dan } x, y \in U.$$

(yang disebut uji subruang)

Contoh 2.1.6. [4] Diberikan himpunan

$$c_0 = \{(x_n) : x_n \in \mathbb{R},\ \forall\ n \in \mathbb{N},\ \lim_{n\to\infty} x_n = 0\}$$

yaitu himpunan semua barisan bilangan real yang konvergen ke 0. Himpunan c_0 adalah subruang linear dari ℓ^∞.

2.2 Ruang Bernorma

Pada bagian ini dijelaskan mengenai beberapa konsep ruang bernorma, diantaranya definisi ruang bernorma, konvergensi barisan di ruang bernorma, barisan Cauchy, dan sifat-sifat terkait yang ada pada ruang bernorma.

Definisi 2.2.1. [6] *Pandang X ruang vektor atas field $\mathbb{F}$. Suatu fungsi $\|.\|_X : X \to \mathbb{R}$ adalah norma di X apabila untuk setiap $x, y \in X$ dan $\alpha \in \mathbb{F}$, berlaku:*

(N1) $\|x\|_X \geq 0$

(N2) $\|x\|_X = 0 \Longleftrightarrow x = \mathbf{0}_X$

(N3) $\|\alpha x\|_X = |\alpha| \|x\|_X$

(N4) $\|x + y\|_X \leq \|x\|_X + \|y\|_X$ (pertidaksamaan segitiga).

Ruang vektor X yang mempunyai norma disebut ruang vektor bernorma atau dengan singkat disebut ruang bernorma dan dinotasikan dengan $(X, \|.\|_X)$. Vektor x di ruang bernorma X dengan $\|x\|_X = 1$ disebut vektor satuan di X.

Contoh 2.2.2. [6] Ruang vektor ℓ^∞ adalah ruang bernorma dengan fungsi norma $\|.\|_{\ell^\infty} : \ell^\infty \to \mathbb{R}$ yang didefinisikan

$$\|x\|_{\ell^\infty} := \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i|, \quad \forall \bar{x} \in \ell^\infty.$$

Fungsi norma $\|.\|_{\ell^\infty}$ ini disebut **norma supremum** atau norma baku di ℓ^∞ dan biasa dinotasikan dengan $\|.\|_\infty$.

Contoh 2.2.3. [6] Ruang vektor $B[a, b]$ adalah ruang bernorma dengan fungsi norma $\|.\|_{B[a,b]} : B[a, b] \to \mathbb{R}$ yang didefinisikan

$$\|f\|_{B[a,b]} := \sup_{t \in [a,b]} |f(t)|, \quad \forall f \in B[a, b].$$

Fungsi norma $\|.\|_{B[a,b]}$ ini disebut **norma supremum** atau norma baku di $B[a, b]$ dan biasa dinotasikan dengan $\|.\|_\infty$.

Konvergensi barisan dan barisan Cauchy di ruang bernorma berperan penting dalam mendefinisikan ruang Banach. Barisan yang konvergen di ruang bernorma X didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 2.2.4. [6] *Suatu barisan* (x_n) *dari titik-titik dalam suatu ruang bernorma* $(X, \|.\|_X)$ *dikatakan konvergen ke* $x \in X$*, dinotasikan dengan* $x_n \to x$ *untuk* $n \to \infty$ *atau*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

jika barisan bilangan real tak negatif $\|x_n - x\|_X \to 0$ *saat* $n \to \infty$ *atau dengan kalimat lain, untuk setiap* $\varepsilon > 0$*, terdapat* $N \in \mathbb{N}$ *sedemikian hingga* $\|x_n - x\|_X < \varepsilon$ *untuk* $n \geq N$*.*

Adapun definisi dari barisan Cauchy di ruang bernorma X adalah

Definisi 2.2.5. [6] *Misalkan* $(X, \|.\|_X)$ *suatu ruang bernorma. Suatu barisan* (x_n) *dari titik-titik di* X *merupakan barisan Cauchy jika untuk sebarang* $\varepsilon > 0$ *terdapat* N *sedemikian hingga*

$$\|x_m - x_n\|_X < \varepsilon \text{ apabila } m, n \geq N \text{ untuk } m, n \in \mathbb{N}.$$

Dalam ruang bernorma terdapat hubungan antara barisan yang konvergen dengan barisan Cauchy. Hal ini tercantum pada teorema berikut ini.

Teorema 2.2.6. [3] *Misalkan* $(X, \|.\|_X)$ *adalah ruang bernorma. Jika* (x_n) *suatu barisan konvergen di* X *maka* (x_n) *adalah barisan Cauchy.*

Sedangkan definisi dari ruang Banach adalah sebagai berikut.

Definisi 2.2.7. [6] *Misalkan* $(X, \|.\|_X)$ *suatu ruang bernorma. Ruang bernorma* X *dikatakan ruang Banach apabila setiap barisan Cauchy di* X *mempunyai limit di* X*.*

Contoh 2.2.8. [3] Ruang bernorma ℓ^∞ adalah ruang Banach dengan norma baku di ℓ^∞.

Pembahasan berikutnya adalah himpunan terbuka dan tertutup di ruang bernorma. Hal ini diperlukan untuk mendefinisikan himpunan cone yang salah satu sifatnya adalah himpunan tertutup. Sebelum membahas mengenai himpunan terbuka maupun himpunan tertutup alangkah baiknya jika dibahas mengenai konsep dari bola terbuka di ruang bernorma sebab konsep inilah yang menjadi landasan dalam menentukan suatu himpunan dikatakan terbuka maupun tertutup.

Definisi 2.2.9. [6] *Bola terbuka di* $(X, \|.\|_X)$ *dengan pusat* c *dan jari-jari* ε *adalah himpunan dalam bentuk*

$$B(c, \varepsilon) := \{x \in X : \|c - x\|_X < \varepsilon\}$$

dengan $c \in X$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$, *dan* $\varepsilon > 0$. *Bola* $B(c, 1)$ *dengan jari-jari* 1 *disebut* ***bola satuan terbuka***.

Bola terbuka $B(c, \varepsilon)$ dengan jari-jari ε biasa disebut juga sebagai **persekitaran-**ε dari c. Definisi dari bola terbuka ini akan digunakan dalam mendefinisikan titik interior maupun titik akumulasi. Lebih lanjut, konsep dari titik interior maupun titik akumulasi akan berguna dalam mendefinisikan suatu himpunan terbuka ataupun tertutup.

Definisi 2.2.10. [6] *Misalkan* $E \subseteq X$. *Suatu titik* $c \in E$ *disebut titik interior dari* E *jika terdapat* $\varepsilon > 0$ *sedemikian hingga* $B(c, \varepsilon) \subseteq E$.

Definisi 2.2.11. [6] *Suatu himpunan* $G \subseteq X$ *dikatakan terbuka (relatif di* X*) jika setiap titik di* G *merupakan titik interior dari* G.

Contoh 2.2.12. [6] Setiap titik dari suatu bola terbuka $B(c, \varepsilon)$ adalah titik interior dari $B(c, \varepsilon)$ sehingga suatu bola terbuka merupakan himpunan terbuka.

Definisi 2.2.13. [6] *Misalkan $E \subseteq X$. Suatu titik c di X disebut titik akumulasi dari E jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $x \in E$ sedemikian hingga $0 < \|c - x\|_X < \varepsilon$; dengan kata lain $B(c, \varepsilon) \cap E \neq \emptyset$.*

Definisi 2.2.14. [6] *Suatu himpunan $F \subseteq X$ dikatakan tertutup (relatif di X) jika F memuat semua titik akumulasinya.*

Dalam himpunan cone, operasi elemennya berhubungan dengan interior dari himpunan cone itu sendiri sehingga diperlukan pemahaman konsep mengenai definisi interior. Berikut ini adalah definisi dari interior dari suatu himpunan.

Definisi 2.2.15. [6] *Misalkan $E \subseteq X$. Himpunan semua titik interior dari E disebut dengan interior E dan dinotasikan dengan $intE$.*

Dalam ruang bernorma adapula yang disebut dengan titik batas serta himpunan titik batas. Definisi dari titik batas dan himpunan batas adalah sebagai berikut.

Definisi 2.2.16. [6] *Misalkan $E \subseteq X$. Suatu titik $c \in X$ disebut titik batas dari E jika untuk sebarang $\varepsilon > 0$, bola terbuka $B(c, \varepsilon)$ memuat sekurang-kurangnya satu titik dari E dan satu titik dari $E^{\complement}$; dengan kata lain $B(c, \varepsilon) \cap E \neq \emptyset$ dan $B(c, \varepsilon) \cap E^{\complement} \neq \emptyset$. Himpunan semua titik batas dari E disebut batas dari E dan dinotasikan dengan ∂E.*

Contoh 2.2.17. Diberikan selang tertutup $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ dengan norma *Euclid*, interior $[a, b]$ adalah selang terbuka (a, b) sebab untuk setiap titik $c \in (a, b)$ terdapat $\delta = \min\{\|c - a\|, \|c - b\|\}$. Selanjutnya jika diberikan himpunan $[a, b] \times [a, b] \subseteq \mathbb{R}^2$ dengan norma *Euclid* diperoleh bahwa interior dari $[a, b] \times [a, b]$ adalah himpunan $(a, b) \times (a, b)$ sebab untuk setiap titik $c \in (a, b) \times (a, b)$ terdapat

$\delta = \min\{\|c - x\|\}$ dengan $x = (x_1, a), (x_1, b), (a, x_2), (b, x_2)$ untuk $a \leq x_1 \leq b$ dan $a \leq x_2 \leq b$. Bila diperhatikan titik a, b pada contoh pertama dan $x = (x_1, a), (x_1, b), (a, x_2), (b, x_2)$ dengan $a \leq x_1 \leq b$ dan $a \leq x_2 \leq b$ pada contoh kedua merupakan titik batas dari masing-masing himpunan yang diberikan, yaitu $\partial([a, b]) = \{a, b\}$ dan $\partial([a, b] \times [a, b]) = \{x \in [a, b] \times [a, b] : x = (x_1, a), (x_1, b), (a, x_2), (b, x_2)$ dengan $a \leq x_1 \leq b$ dan $a \leq b\}$.

Teorema berikut ini berguna dalam menunjukkan sifat ketertutupan himpunan dalam ruang bernorma.

Teorema 2.2.18. [3] *Misalkan $(X, \|.\|_X)$ adalah ruang bernorma dan $E \subseteq X$. Himpunan E tertutup jika dan hanya jika untuk sebarang barisan (x_n) di X dan $x_n \to x$ berakibat $x \in E$.*

Konsep berikutnya yang akan dibahas adalah ruang bernorma cone. Namun, sebelumnya akan dibahas mengenai himpunan yang memiliki sifat cone atau singkatnya himpunan cone.

2.3 Ruang Bernorma Cone

Notasi yang digunakan dalam ruang bernorma cone selalu berkaitan dengan himpunan cone yang dipilih. Pada sub bab ini akan dijelaskan mengenai definisi dari himpunan cone beserta sifat-sifatnya dan selanjutnya akan dibahas mengenai ruang bernorma cone.

Definisi 2.3.1. [2] *Misalkan E adalah ruang Banach dan $P_E \subseteq E$. Himpunan P_E dikatakan cone jika dan hanya jika memenuhi syarat-syarat berikut:*

(C1) P_E *tertutup*, $P_E \neq \{\mathbf{0}_E\}$, *dan* $P_E \neq \emptyset$

(C2) $\alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \alpha, \beta \geq 0$ *dan* $x, y \in P_E \Longrightarrow \alpha x + \beta y \in P_E$

(C3) $P_E \cap -P_E = \mathbf{0}_E$.

Pada himpunan cone P_E dapat didefinisikan urutan parsial "$\preceq$" terhadap P_E, yaitu $x \preceq y$ jika dan hanya jika $y - x \in P_E$. Dalam tugas akhir ini, digunakan notasi $x \prec y$ untuk $x \preceq y$ tetapi $x \neq y$ sedangkan $x \ll y$ untuk $y - x \in intP_E$. Adapun $intP_E$ adalah interior dari P_E [1,2]. Umumnya, pembahasan himpunan cone berkaitan dengan cone normal yang berperan dalam menyelidiki sifat konvergensi barisan [1]. Berikut ini akan disajikan mengenai definisi himpunan cone normal P_E dengan konstanta normal K.

Definisi 2.3.2. [1] *Misalkan E ruang Banach, $P_E \subseteq E$, dan himpunan P_E adalah cone. Himpunan P_E dikatakan normal jika dan hanya jika terdapat $K \in \mathbb{R}$, $K > 0$ sedemikian hingga $\forall\ x, y \in E$, $\mathbf{0}_E \preceq x \preceq y$ berakibat $\|x\| \leq K\|y\|$. Konstanta K terkecil yang memenuhi ketaksamaan tersebut disebut konstanta normal dari P_E.*

Untuk selanjutnya, diasumsikan bahwa E adalah ruang Banach bernilai real dan P_E adalah himpunan cone normal dari ruang Banach E dengan $intP_E \neq \emptyset$ serta $\preceq$ adalah urutan parsial terhadap P_E. Notasi "$\preceq$" merupakan urutan parsial terhadap P_E, untuk menunjukkannya diperlukan lemma berikut ini.

Lemma 2.3.3. [4] *Misalkan E ruang Banach, $P_E \subseteq E$, dan P_E adalah himpunan cone maka $\mathbf{0}_E \in P_E$.*

Berdasarkan lemma di atas, dapat ditunjukkan teorema berikut ini berlaku.

Teorema 2.3.4. [9] *Misalkan E ruang Banach, $P_E \subseteq E$, dan P_E adalah himpunan cone. Notasi " $\preceq$ " merupakan urutan parsial.*

Bukti. Akan ditunjukkan bahwa " $\preceq$ " memenuhi sifat refleksif, antisimetri, dan transitif. Berdasarkan Lemma 2.3.3, untuk sebarang $x \in E$ diperoleh $x-x=\mathbf{0}_E \in P_E$ yang berarti $x \preceq x$. Hal ini menunjukkan sifat refleksif. Selanjutnya jika diberikan $x, y \in E$ dengan $x \preceq y$ dan $y \preceq x$, ini berarti $y-x \in P_E$ dan $x-y=-(y-x) \in P_E$ akibatnya $y-x=\mathbf{0}_E$ atau dengan kata lain $x=y$. Ini menunjukkan sifat antisimetri. Berikutnya, jika diberikan $x, y, z \in E$ dengan $x \preceq y$ dan $y \preceq z$ maka $y-x \in P_E$ dan $z-y \in P_E$, berdasarkan sifat himpunan cone dapat ditulis bahwa $z-x=(y-x)+(z-y) \in P_E$ atau dengan kata lain $x \preceq z$. Hal ini menunjukkan sifat transitif. Dengan demikian notasi " $\preceq$ " memenuhi sifat refleksif, antisimetri, dan transitif atau dengan kata lain notasi " $\preceq$ " merupakan urutan parsial pada E. $\square$

Berikut ini adalah sifat dasar dari himpunan cone, yaitu

Lemma 2.3.5. [4] *Diberikan E ruang Banach, $P \subseteq E$, dan P adalah himpunan cone. Untuk setiap $x, y \in E$ dan $\alpha \geq 0$ pernyataan berikut berlaku*

(a) *jika $x \ll y$ maka $x \preceq y$,*

(b) *jika $x \preceq y$ maka $\alpha x \ll \alpha y$.*

Untuk menyelidiki sifat ruang operator linear dalam ruang bernorma cone diperlukan beberapa lemma, diantaranya

Lemma 2.3.6. [4] *Diberikan E ruang Banach, $P_E \subseteq E$, dan P_E adalah himpunan cone. Misalkan barisan (a_n) dan (b_n) di E beruturut-turut konvergen ke $a \in E$ dan $b \in E$. Jika $a_n \preceq b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ maka $a \preceq b$.*

Akibat 2.3.7. [4] *Diberikan E ruang Banach, $P_E \subseteq E$, dan P_E adalah himpunan cone. Misalkan barisan (y_n) di E konvergen ke $y \in E$. Jika diberikan $w \in E$ dengan $y_n \preceq w$, $\forall n \in \mathbb{N}$ maka $y \preceq w$.*

Pengertian terbatas dalam himpunan cone disajikan dalam definisi berikut ini.

Definisi 2.3.8. [2] *Diberikan* E *adalah ruang Banach,* $A \subseteq E$*, dan* P_E *adalah himpunan cone. Himpunan* A *dikatakan terbatas ke atas jika terdapat* $t \in E, t \succeq \boldsymbol{0}_E$ *sedemikian hingga* $a \preceq t, \forall a \in A$*. Dalam hal ini,* t *disebut batas atas dari* A*. Lebih lanjut,* t' *batas atas dari* A *disebut supremum dari* A *jika diberikan sebarang batas atas dari* A *berakibat* $t' \preceq t$*. Selanjutnya,* t' *dinotasikan dengan* $supA$*. Himpunan cone* P_E *dikatakan memiliki sifat supremum jika setiap himpunan terbatas ke atas* A *dalam* P_E *berakibat batas atas terkecil berada di* P_E *atau dengan kata lain* $supA \in P_E$*.*

Konsep terbatas ke atas dalam himpunan cone ini, akan menjadi landasan dalam mendefinisikan himpunan terbatas cone pada ruang bernorma cone. Pembahasan selanjutnya adalah konsep dari ruang bernorma cone.

Definisi 2.3.9. [2] *Misalkan* X *adalah ruang vektor atas* $\mathbb{R}$ *dan didefinisikan suatu fungsi* $\|.\|_X^E : X \to E$ *yang memenuhi*

(NC1) $\|x\|_X^E \succeq \mathbf{0}_E, \forall x \in X$ *dan* $\|x\|_X^E = \mathbf{0}_E \Longleftrightarrow x = \mathbf{0}_X$

(NC2) $\|\alpha x\|_X^E = |\alpha| \|x\|_X^E, \forall x \in X$ *dan* $\alpha \in \mathbb{R}$

(NC3) $\|x + y\|_X^E \preceq \|x\|_X^E + \|y\|_X^E, \forall x, y \in X$

Selanjutnya, fungsi $\|.\|_X^E$ *disebut norma cone pada* X *dan pasangan* $(X, \|.\|_X^E)$ *disebut ruang bernorma cone.*

Contoh 2.3.10. [5] Diberikan ruang vektor $\mathbb{R}$, ruang Banach $\mathbb{R}^2$, dan himpunan cone $\mathbb{R}^2_{0+}$ dengan $\mathbb{R}^2_{0+} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \geq 0\}$. Fungsi $\|.\|_{\mathbb{R}}^{\mathbb{R}^2} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ yang didefinisikan untuk setiap $x \in \mathbb{R}$ berlaku

$$\|x\|_{\mathbb{R}}^{\mathbb{R}^2} := (|x|, \alpha|x|) \qquad \text{dengan} \qquad \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \geq 0.$$

Fungsi $\|.\|_{\mathbb{R}}^{\mathbb{R}^2}$ merupakan norma cone pada $\mathbb{R}$. Lebih lanjut, $\mathbb{R}$ merupakan ruang bernorma cone dengan norma $\|.\|_{\mathbb{R}}^{\mathbb{R}^2}$.

Karena ruang bernorma cone merupakan perumuman dari ruang bernorma maka secara umum konsep mengenai konvergensi barisan, barisan Cauchy, ruang Banach juga terdapat pada ruang bernorma cone. Berikut ini akan disajikan definisi konvergensi barisan, barisan Cauchy di ruang bernorma cone, dan definisi ruang Banach cone.

Definisi 2.3.11. [2] *Misalkan E adalah ruang Banach, $(X, \|.\|_X^E)$ adalah ruang bernorma cone, $x \in X$ dan (x_n) adalah barisan di X. Barisan (x_n) dikatakan konvergen ke x jika $\forall c \in E$ dengan $\boldsymbol{0}_E \ll c$ terdapat bilangan asli N sedemikian hingga $\|x_n - x\|_X^E \ll c$ untuk semua $n \geq N$. Selanjutnya barisan (x_n) konvergen ke x dinotasikan dengan $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ atau $x_n \to x$ saat $n \to \infty$.*

Definisi 2.3.12. [2] *Misalkan E adalah ruang Banach, $(X, \|.\|_X^E)$ adalah ruang bernorma cone, $x \in X$ dan (x_n) adalah barisan di X. Barisan (x_n) dikatakan barisan Cauchy jika $\forall c \in E$ dengan $\boldsymbol{0}_E \ll c$ terdapat bilangan asli N sedemikian hingga $\|x_m - x_n\|_X^E \ll c$ untuk semua $n, m \geq N$.*

Definisi 2.3.13. [2] *Ruang bernorma cone $(X, \|.\|_X^E)$ dikatakan ruang Banach jika setiap barisan Cauchy di X konvergen di X.*

Sama halnya dengan ruang bernorma, suatu barisan yang konvergen dalam ruang bernorma cone juga merupakan barisan Cauchy dalam ruang bernorma cone tersebut. Hal ini tercantum dalam teorema berikut ini.

Teorema 2.3.14. [1] *Misalkan $(X, \|.\|_X^E)$ adalah ruang bernorma cone dan (x_n) adalah barisan di X. Jika (x_n) konvergen ke x maka (x_n) adalah barisan Cauchy.*

Disebutkan dalam [3], sebarang barisan yang konvergen selalu terbatas maka untuk ruang bernorma cone juga berlaku demikian. Hal ini dapat dilihat pada teorema berikut.

Teorema 2.3.15. [4] *Misalkan* $(X, \|.\|_X^E)$ *ruang bernorma cone. Jika barisan* (x_n) *di* X *konvergen ke* $x \in X$ *maka barisan* (x_n) *terbatas cone.*

Berikut ini diberikan teorema-teorema yang berguna dalam menunjukkan ruang operator linear terbatas cone merupakan ruang Banach cone.

Teorema 2.3.16. [4] *Diberikan* $(X, \|.\|_X^E)$ *ruang bernorma cone, dan* P *cone normal dengan konstanta normal* K*. Misalkan* (x_n) *adalah barisan di* X*. Jika* $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ *maka* $\lim_{n\to\infty} \|x_n\|_X^E = \|x\|_X^E$.

Teorema 2.3.17. [4] *Misalkan* $(X, \|.\|_X^E)$ *ruang bernorma cone himpunan* P_E *adalah himpunan cone dari ruang Banach* E*. Pandang* (x_n) *dan* (y_n) *dua barisan di* X *yang berturut-turut konvergen ke* x *dan ke* y *di* X *serta* (α_n) *barisan di* $\mathbb{R}$ *yang konvergen ke* α *di* $\mathbb{R}$*, maka berlaku*

(a) $\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = x + y$,

(b) $\lim_{n\to\infty} \alpha_n x_n = \alpha x$.

Demikian pula dapat didefinisikan suatu bola terbuka di ruang bernorma cone, yaitu

Definisi 2.3.18. [2] *Misalkan* $(X, \|.\|_X^E)$ *adalah ruang bernorma cone, bola terbuka di* X *dengan pusat* c *dan jari-jari* ε *adalah himpunan dalam bentuk*

$$B_\varepsilon(c) := \{y \in X : \|c - y\|_X^E \ll \varepsilon\}.$$

Pada Definisi 2.3.8 telah dijelaskan mengenai definisi dari himpunan yang terbatas ke atas dan himpunan yang memiliki sifat supremum. Untuk mendefinisikan terbatas cone, selalu diasumsikan bahwa himpunan cone P_E memiliki sifat supremum. Adapun definisi dari terbatas cone adalah sebagai berikut.

Definisi 2.3.19. [2] *Misalkan* $(X, \|.\|_X^E)$ *adalah ruang bernorma cone dan* $A \subseteq X$*. Himpunan* A *dikatakan terbatas cone jika dan hanya jika himpunan* $\{\|x\|_X^E : x \in A\}$ *dalam* E *terbatas ke atas.*

Dari Definsi 2.3.19 dapat diperoleh Lemma 2.3.20 berikut ini.

Lemma 2.3.20. [4] *Misalkan* $(X, \|.\|_X^E)$ *adalah ruang bernorma cone dan* $A \subseteq X$ *dikatakan terbatas cone jika dan hanya jika terdapat* $t \in E, t \succeq \boldsymbol{0}_E$ *sedemikian hingga* $\|x\|_X^E \preceq t, \forall x \in A$*.*

Lebih lanjut, Definisi 2.3.19 dan Lemma 2.3.20 digunakan untuk mendefinisikan suatu operator linear terbatas cone. Adapun pembahasan mengenai operator linear pada ruang bernorma cone akan dibahas pada sub bab berikutnya.

2.4 Operator Linear Kontinu dan Terbatas pada Ruang Bernorma Cone

Untuk menyelidiki sifat kekontinunan maupun keterbatasan operator linear dalam ruang bernorma cone diperlukan pengertian mengenai operator linear. Operator adalah suatu pemetaan dari ruang vektor V ke ruang vektor W atas field yang sama, khususnya adalah ruang bernorma. Beberapa buku literatur menuliskan operator sebagai transformasi, diantaranya [6].

Definisi 2.4.1. [6] *Misalkan* V *dan* W *dua ruang vektor atas* $\mathbb{F}$*. Operator linear dari* V *ke* W *adalah pemetaan* $T : V \to W$ *yang memenuhi syarat-syarat berikut ini:*

(OL1) *Untuk setiap* $x, y \in V$, *berlaku* $T(x+y) = T(x)+T(y)$

(OL2) *Untuk setiap* $c \in \mathbb{F}$ *dan* $x \in V$, *berlaku* $T(cx) = cT(x)$.

Lebih lanjut, himpunan semua operator linear dinotasikan dengan $L(V, W)$. Himpunan $L(V, W)$ merupakan ruang vektor atas $\mathbb{F}$ dengan operasi penjumlahan vektor untuk setiap $x \in V$ didefinisikan

$$T_1 + T_2 := (T_1 + T_2)(x) = T_1(x) + T_2(x) \qquad \forall T_1, T_2 \in L(V, W)$$

dan perkalian skalar untuk setiap $x \in V$ dan $\alpha \in \mathbb{F}$ didefinisikan

$$\alpha T := (\alpha T)(x) = \alpha T(x) \qquad \forall T \in L(V, W).[6]$$

Untuk sebarang operator linear berlaku lemma berikut ini.

Lemma 2.4.2. [6] *Misalkan* V *dan* W *masing-masing adalah ruang vektor dan* $T \in L(V, W)$ *maka berlaku* $T(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$.

Adapun operator linear kontinu dalam ruang bernorma cone didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 2.4.3. [2] *Misalkan* $(X, \|.\|_X^E)$ *dan* $(Y, \|.\|_Y^E)$ *masing-masing adalah ruang bernorma cone serta* T *merupakan operator linear dari ruang bernorma cone* X *ke ruang bernorma cone* Y

(a) *Operator linear* T *dikatakan kontinu di* $x_0 \in X$ *jika dan hanya jika untuk setiap* $c \in E, c \gg \boldsymbol{0}_E$ *terdapat* $t \in E$, $t \gg \boldsymbol{0}_E$ *sedemikian hingga* $\forall x \in X$ *dan* $\|x - x_0\|_{p_1} \ll t$ *berakibat* $\|T(x) - T(x_0)\|_Y^E \ll c$

(b) *Operator linear* T *kontinu pada* X *jika dan hanya jika* T *kontinu di setiap titik* X

(c) *Operator linear T dikatakan kontinu seragam jika dan hanya jika untuk setiap $c \in E, c \gg \boldsymbol{0}_E$ terdapat $t \in E, t \gg \boldsymbol{0}_E$ sedemikian hingga $\forall x, u \in X$ dan $\|x-u\|_X^E \ll t$ berakibat $\|T(x)-T(u)\|_Y^E \ll c$*

(d) *Operator linear T dikatakan kontinu barisan di X jika dan hanya jika untuk setiap barisan (x_n) di X yang konvergen ke $x_0 \in X$ maka barisan $(T(x_n))$ di Y konvergen ke $T(x_0) \in Y$.*

Berdasarkan Definisi 2.4.3 dapat diperoleh teorema berikut.

Teorema 2.4.4. [2] *Misalkan $(X, \|.\|_X^E)$ dan $(Y, \|.\|_Y^E)$ masing-masing adalah ruang bernorma cone. Untuk suatu operator linear T dari ruang bernorma cone X ke ruang bernorma cone Y dan suatu $x_0 \in X$ pernyataan berikut ekivalen*

(a) *T kontinu seragam*

(b) *T kontinu pada X*

(c) *T kontinu di x_0*

(d) *T kontinu di $\boldsymbol{0}_X \in X$*

(e) *T kontinu barisan di X.*

Pembahasan berikutnya adalah sifat keterbatasan operator linear pada ruang bernorma cone. Dasar pembahasan mengenai operator linear yang terbatas pada ruang bernorma cone adalah definisi terbatas cone dalam ruang bernorma cone.

Definisi 2.4.5. [2] *Misalkan $(X, \|.\|_X^E)$ dan $(Y, \|.\|_Y^E)$ keduanya adalah ruang bernorma cone. Diberikan $T : X \to Y$ adalah operator linear. Operator linear T dikatakan terbatas cone jika himpunan $T(B_{t^*}(\boldsymbol{0}_X))$ dalam Y terbatas cone, untuk suatu t^* tetap dengan $t^* \in E$ dan $t^* \gg \boldsymbol{0}_E$.*

Dari Definisi 2.4.5 dapat diperoleh suatu lemma berikut.

Lemma 2.4.6. *Misalkan T adalah operator linear dari ruang bernorma cone $(X, \|.\|_X^E)$ ke ruang bernorma cone $(Y, \|.\|_Y^E)$. Diberikan suatu t^* tetap dengan $t^* \in E$ dan $t^* \gg \mathbf{0}_E$, T terbatas cone jika dan hanya jika terdapat $t \in E$, $t \succeq \mathbf{0}_E$ sedemikian hingga $\|T(x)\|_Y^E \preceq t, \forall x \in X$ dengan $\|x\|_X^E \ll t^*$.*

Bukti. Misalkan T terbatas cone, berarti himpunan $T(B_{t^*}(\mathbf{0}_X)) = \{T(x) : x \in X, \|x\|_X^E \ll t^*\}$ dalam Y terbatas cone. Hal ini juga berarti himpunan $\{\|T(x)\|_Y^E : x \in X, \ \|x\|_X^E \ll t^*\}$ dalam E terbatas ke atas, dengan kata lain terdapat $t \in E$ dengan $t \succeq \mathbf{0}_E$ sedemikian hingga $\|T(x)\|_Y^E \preceq t, \ \forall x \in X$ dengan $\|x\| \ll t^*$. Sebaliknya, asumsikan terdapat $t \in E$ dengan $t \succeq \mathbf{0}_E$ sedemikian hingga $\|T(x)\|_Y^E \preceq t, \forall x \in X$ untuk $\|x\|_X^E \ll t^*$. Hal ini berarti himpunan $\{\|T(x)\|_Y^E : x \in X, \|x\|_X^E \ll t^*\}$ dalam E terbatas ke atas. Dengan demikian, himpunan $T(B_{t^*}(\mathbf{0}_X)) = \{T(x) : x \in X, \|x\|_X^E \ll t^*\}$ dalam Y terbatas cone. Jadi, T terbatas cone. $\square$

"Halaman ini sengaja dikosongkan."

BAB III
METODE PENELITIAN

Dalam bab ini diuraikan langkah-langkah sistematis yang dilakukan dalam proses pengerjaan tugas akhir. Tahapan penelitian dalam tugas akhir ini terdiri atas empat tahap, yaitu: studi literatur, mengkaji ruang Banach ℓ^1 serta ruang bernorma cone $C'[a,b]$ dan $C[a,b]$, menyelidiki sifat keterbatasan dan kekontinuan operator linear pada ruang bernorma cone $C'[a,b]$ ke $C[a,b]$ serta sifat-sifat ruang operator linear terbatas pada ruang bernorma cone $C'[a,b]$ ke $C[a,b]$, dan penarikan kesimpulan.

3.1 Studi Literatur

Pada tahap ini dilakukan studi referensi tentang ruang Banach ℓ^1, ruang vektor $C'[a,b]$ dan $C[a,b]$, konsep-konsep himpunan cone, konsep-konsep ruang bernorma cone, sifat-sifat operator linear pada ruang bernorma cone secara umum serta sifat-sifat ruang operator linear terbatas pada ruang bernorma. Referensi yang digunakan adalah paper-paper dalam jurnal ilmiah dan buku-buku literatur.

3.2 Mengkaji ruang Banach ℓ^1 serta ruang bernorma cone $C'[a,b]$ dan $C[a,b]$

Dalam tahap ini akan dilakukan pengkajian mengenai ruang Banach ℓ^1 dan himpunan cone dari ruang Banach ℓ^1. Selanjutnya akan dilakukan pengkajian mengenai ruang bernorma cone $C'[a,b]$ bernilai ℓ^1 dan ruang bernorma cone $C[a,b]$ bernilai ℓ^1 terutama konvergensi barisan dalam kedua ruang bernorma cone tersebut.

3.3 Menyelidiki sifat keterbatasan dan kekontinuan operator linear pada ruang bernorma cone $C'[a, b]$ ke $C[a, b]$ serta sifat-sifat ruang operator linear terbatas pada ruang bernorma cone $C'[a, b]$ ke $C[a, b]$

Tahap ini adalah inti dari tugas akhir ini yaitu melakukan penyelidikan bagaimanakah sifat keterbatasan dan kekontinuan operator linear dari ruang bernorma cone $C'[a, b]$ ke $C[a, b]$. Lebih lanjut, akan diselidiki mengenai ruang operator linear terbatas pada ruang bernorma cone $C'[a, b]$ ke $C[a, b]$.

3.4 Penarikan Kesimpulan

Pada tahap ini dilakukan penarikan kesimpulan berdasarkan hasil penyelidikan pada tahap sebelumnya.

BAB IV
ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dibahas mengenai ruang ℓ^1, ruang $C'[a,b]$ dan ruang $C[a,b]$, himpunan cone dari ℓ^1, ruang bernorma cone $C'[a,b]$ bernilai ℓ^1, ruang bernorma cone $C[a,b]$ bernilai ℓ^1, operator linear kontinu terbatas pada ruang bernorma cone $C'[a,b]$ ke $C[a,b]$ serta ruang operator linear pada ruang bernorma cone $C'[a,b]$ bernilai ℓ^1.

4.1 Ruang ℓ^1

Batasan masalah yang diberikan dalam tugas akhir ini adalah fungsi norma cone yang kodomainnya didefinisikan pada ruang Banach ℓ^1. Sebelum membahas bahwa ℓ^1 merupakan ruang Banach, diperlukan pemahaman mengenai definisi dari ruang ℓ^1 yang selanjutnya akan dibahas mengenai ruang ℓ^1 merupakan ruang bernorma.

Diberikan $p \in \mathbb{R}$ dengan $1 \leq p < \infty$, didefinisikan elemen dari ruang ℓ^p adalah barisan bilangan $\bar{x} := (x_i) = (x_1, x_2, \ldots)$ sedemikian hingga $|x_1|^p + |x_2|^p + \ldots$ konvergen atau dengan kata lain

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty$$

untuk suatu $p \geq 1$ tetap. Jika barisan bilangan yang diambil adalah barisan bilangan real maka dikatakan *ruang real* ℓ^p dan jika barisan bilangan yang diambil adalah barisan bilangan kompleks maka dikatakan *ruang kompleks* ℓ^p. Dalam ruang ℓ^p diberikan beberapa pertidaksamaan yang sangat berguna dalam menyelidiki sifat-sifat ruang ℓ^p sendiri, diantaranya

(a) Pertidaksamaan Holder

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^q \right)^{1/q}$$

dengan $p > 1$ dan $1/p + 1/q = 1$.

(b) Pertidaksmaan Cauchy-Schwarz

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i y_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^2}$$

(c) Pertidaksamaan Minkowski

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^p \right)^{1/p}$$

dengan $\bar{x}, \bar{y} \in \ell^p$, dan $1 \leq p < \infty$.

Adapun norma baku yang didefinisikan pada ℓ^p adalah

$$\|\bar{x}\|_{\ell^p} := \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^p, \forall \bar{x} \in \ell^p. \qquad [3]$$

Dalam tugas akhir ini, pembahasan hanya dikhususkan untuk ruang real ℓ^p dengan $p = 1$ atau cukup dikatakan ruang ℓ^1.

Definisi 4.1.1. [3,6] *Ruang ℓ^1 adalah himpunan dari barisan bilangan real yang elemennya dinotasikan dengan $\bar{x} = (x_i) = (x_1, x_2, \ldots)$ sedemikian hingga jumlahan absolut dari nilai-nilai barisannya konvergen atau dengan kata lain $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| < \infty$.*

Beberapa sifat dari ruang ℓ^1 tercantum pada teorema-teorema berikut ini:

Teorema 4.1.2. [3,6] *Ruang* ℓ^1 *adalah ruang vektor atas* $\mathbb{R}$.

Bukti. Akan ditunjukkan bahwa ℓ^1 merupakan ruang vektor atas $\mathbb{R}$ dengan cara menunjukkan ℓ^1 merupakan subruang linear dari ℓ^∞. Sebelumnya, akan ditunjukkan bahwa $\ell^1 \neq \emptyset$ dan $\ell^1 \subseteq \ell^\infty$. Menurut Definisi 4.1.1, jelas bahwa $\ell^1 \neq \emptyset$ dan $\ell^1 \subseteq \ell^\infty$ sebab jika diambil sebarang $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell^1$ berakibat $\bar{x} \in \ell^\infty$.

Selanjutnya, akan dilakukan uji subruang. Berdasarkan Definisi 2.1.5 akan ditunjukkan berlakunya syarat $\alpha\bar{x} + \beta\bar{y} \in \ell^1$, untuk semua $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, dan $\bar{x}, \bar{y} \in \ell^1$. Ambil sebarang $\bar{x}, \bar{y} \in \ell^1$ dan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ maka berlaku

$$\begin{aligned} \alpha\bar{x} + \beta\bar{y} &= \alpha(x_i) + \beta(y_i) \\ &= (\alpha x_i) + (\beta y_i) \\ &= (\alpha x_i + \beta y_i) \end{aligned}$$

untuk setiap $i \in \mathbb{N}$. Karena $x_i, y_i, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ akibatnya $\alpha x_i + \beta y_i \in \mathbb{R}$. Di sisi lain, $\bar{x} = (x_i) \in \ell^1$ dan $\bar{y} = (y_i) \in \ell^1$ untuk $i \in \mathbb{N}$ berarti

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| < \infty \qquad \text{dan} \qquad \sum_{i=1}^{\infty} |y_i| < \infty. \tag{4.1}$$

Dari pertidaksamaan Minkowski diperoleh

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha x_i + \beta y_i| &\leq \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha x_i| + \sum_{i=1}^{\infty} |\beta y_i| \\ &= |\alpha| \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| + |\beta| \sum_{i=1}^{\infty} |y_i|. \end{aligned}$$

Berdasarkan (4.1) diperoleh bahwa

$$|\alpha|\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|+|\beta|\sum_{i=1}^{\infty}|y_i|<\infty.$$

Hal ini menunjukkan bahwa $\alpha\bar{x}+\beta\bar{y}=(\alpha x_i+\beta y_i)\in\ell^1$. Dengan demikian, ruang ℓ^1 adalah subruang linear dari ℓ^∞. Ini berarti ℓ^1 juga merupakan ruang vektor atas $\mathbb{R}$. $\square$

Teorema 4.1.3. [3,6] *Ruang vektor ℓ^1 adalah ruang bernorma dengan norma yang didefinisikan untuk setiap $\bar{x}=(x_i)=(x_1,x_2,\ldots)\in\ell^1$ berlaku*

$$\|\bar{x}\|_{\ell^1}:=\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|.$$

Fungsi norma $\|.\|_{\ell^1}$ tersebut disebut ***norma baku*** *pada ℓ^1.*

Bukti. Akan ditunjukkan bahwa fungsi $\|.\|_{\ell^1}$ merupakan norma pada ℓ^1. Menurut Definsi 2.2.1 akan ditunjukkan bahwa $\|.\|_{\ell^1}$ harus memenuhi syarat-syarat norma. Ambil sebarang $\bar{x},\bar{y}\in\ell^1$ dan $\alpha\in\mathbb{R}$.

(N1) Jelas bahwa $\|\bar{x}\|_{\ell^1}=\sum\limits_{i=1}^{\infty}|x_i|\geq 0$ sebab $|x_i|\geq 0, \forall i\in\mathbb{N}$.

(N2) Diberikan $\|\bar{x}\|_{\ell^1}=0$, berarti $\sum\limits_{i=1}^{\infty}|x_i|=0$. Karena $\sum\limits_{i=1}^{\infty}|x_i|\geq 0$ satu-satunya yang memenuhi adalah $x_i=0$ untuk setiap $i\in\mathbb{N}$ atau dengan kata lain $\bar{x}=(x_i)=(0,0,\ldots)=\bar{0}$. Hal ini menunjukkan bahwa $\bar{x}=\bar{0}$. Sebaliknya, jika $\bar{x}=\bar{0}$ berarti $x_i=0$ untuk setiap $i\in\mathbb{N}$ akibatnya $\|\bar{x}\|_{\ell^1}=\|\bar{0}\|_{\ell^1}=\sum\limits_{i=1}^{\infty}|0|=0$.
Jadi, diperoleh $\|x\|_{\ell^1}=0$ jika dan hanya jika $x=\bar{0}$.

(N3)

$$
\begin{aligned}
\|\alpha\bar{x}\|_{\ell^1} &= \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha x_i| \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha||x_i| \\
&= |\alpha| \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| \\
&= |\alpha|\|\bar{x}\|_{\ell^1}.
\end{aligned}
$$

Jadi, $\|\alpha\bar{x}\|_{\ell^1} = |\alpha|\|\bar{x}\|_{\ell^1}$.

(N4) Dari pertidaksamaan Minkowski, diperoleh

$$
\begin{aligned}
\|\bar{x}+\bar{y}\|_{\ell^1} &= \sum_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i| \\
&\leq \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| + \sum_{i=1}^{\infty} |y_i| \\
&= \|\bar{x}\|_{\ell^1} + \|\bar{y}\|_{\ell^1}.
\end{aligned}
$$

Jadi, $\|\bar{x}+\bar{y}\|_{\ell^1} \leq \|\bar{x}\|_{\ell^1} + \|\bar{y}\|_{\ell^1}$. Karena syarat-syarat (N1)-(N4) terpenuhi, dapat dikatakan bahwa fungsi $\|.\|_{\ell^1}$ adalah norma pada ℓ^1 dan ruang ℓ^1 merupakan ruang bernorma. $\square$

Teorema 4.1.4. [3,6] *Ruang ℓ^1 adalah ruang Banach dengan norma baku.*

Bukti. Menurut Definisi 2.2.7, akan ditunjukkan bahwa ruang ℓ^1 merupakan ruang bernorma yang setiap barisan Cauchynya mempunyai limit di ℓ^1. Telah ditunjukkan pada Teorema 4.1.3 bahwa ℓ^1 merupakan ruang bernorma dengan norma baku. Dengan demikian, cukup ditunjukkan bahwa setiap barisan Cauchy diℓ^1 mempunyai limit di ℓ^1.

Misalkan $(\bar{x}_n)$ adalah barisan Cauchy di ℓ^1 dengan $\bar{x}_n =$

$(x_{n1}, x_{n2}, \ldots)$. Selanjutnya bila diberikan sebarang $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli N sedemikian hingga untuk $m, n \geq N$ berlaku

$$\|\bar{x}_m - \bar{x}_n\|_{\ell^1} = \sum_{i=1}^{\infty} |x_{mi} - x_{ni}| < \varepsilon. \tag{4.2}$$

Akibatnya untuk suatu $i \in \mathbb{N}$ tetap diperoleh

$$|x_{mi} - x_{ni}| < \varepsilon \qquad \text{untuk} \qquad m, n \geq N. \tag{4.3}$$

Dari (4.3) dapat dikatakan bahwa $(x_{1i}, x_{2i}, \ldots)$ adalah barisan Cauchy di $\mathbb{R}$. Karena $\mathbb{R}$ lengkap sehingga dapat dikatakan bahwa $x_{ni} \to x_i$ saat $n \to \infty$. Kemudian didefinisikan $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots)$.

Langkah berikutnya adalah menunjukkan bahwa $\bar{x} \in \ell^1$ dan $\bar{x}_n \to \bar{x}$. Dari (4.2) untuk $m, n \geq N$ diperoleh

$$\sum_{i=1}^{k} |x_{mi} - x_{ni}| < \varepsilon \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Ketika $m \to \infty$, untuk $n \geq N$ diperoleh

$$\sum_{i=1}^{k} |x_{ni} - x_i| < \varepsilon \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Selanjutnya, saat $k \to \infty$ dan $n \geq N$ diperoleh

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_{ni} - x_i| < \varepsilon < \infty. \tag{4.4}$$

Hal ini menunjukkan bahwa $\bar{x}_n - \bar{x} = (x_{ni} - x_i) \in \ell^1$. Misalkan $\bar{x} = \bar{x}_n + (\bar{x} - \bar{x}_n)$. Karena $\bar{x}_n \in \ell^1$ dan dengan menggunakan pertidaksamaan Minkowski diperoleh

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| &= \sum_{i=1}^{\infty} |x_{ni} + (x_i - x_{ni})| \\
&\leq \sum_{i=1}^{\infty} |x_{ni}| + \sum_{i=1}^{\infty} |x_i - x_{ni}| \\
&= \sum_{u=1}^{\infty} |x_{ni}| + \sum_{i=1}^{\infty} |x_{ni} - x_i| \\
&< \varepsilon + \varepsilon \\
&= 2\varepsilon \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Artinya $\bar{x} = \bar{x}_n + (\bar{x} - \bar{x}_n) \in \ell^1$ dan (4.4) menunjukkan bahwa $\bar{x}_n \to \bar{x}$. Karena $(\bar{x}_n)$ adalah sebarang barisan Cauchy di ℓ^1 dapat disimpulkan bahwa ℓ^1 adalah ruang bernorma yang lengkap. Jadi, ruang bernorma ℓ^1 adalah ruang Banach. □

Berikutnya adalah pembahasan mengenai ruang $C[a, b]$.

4.2 Ruang $C[a, b]$

Pada bagian ini akan dibahas mengenai definisi ruang $C[a, b]$, ruang bernorma $C[a, b]$, dan ruang Banach $C[a, b]$.

Definisi 4.2.1. [3,6] *Himpunan $C[a, b]$ adalah himpunan dari semua fungsi bernilai real yang didefinisikan pada selang $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ dan kontinu pada selang $[a, b]$.*

Berikut ini disajikan teorema terkait kontinuitas suatu fungsi.

Teorema 4.2.2. [8] *Diberikan $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$, $g : A \to R$, dan $b \in \mathbb{R}$. Misalkan $c \in A$ dan f, g merupakan fungsi kontinu di c maka $f + g$ dan bf merupakan fungsi kontinu di c.*

Teorema 4.2.3. [8] *Diberikan* $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$, *dan* $B \subseteq A$. *Fungsi* f *dikatakan kontinu pada* B *jika* f *kontinu di setiap titik dari* B.

Beberapa sifat dari ruang $C[a,b]$ tercantum pada teorema-teorema berikut ini.

Teorema 4.2.4. [3,6] *Himpunan* $C[a,b]$ *merupakan ruang vektor atas* $\mathbb{R}$.

Bukti. Untuk menunjukkan $C[a,b]$ adalah ruang vektor atas $\mathbb{R}$ akan ditunjukkan bahwa $C[a,b]$ merupakan subruang linear dari $B[a,b]$. Menurut Definisi 4.2.1, jelas bahwa $C[a,b] \neq \emptyset$ dan $C[a,b] \subseteq B[a,b]$ sebab terdapat fungsi $\theta \in C[a,b]$ dengan $\theta = \theta(t) = 0$ untuk setiap $t \in [a,b]$. Demikian pula, fungsi $\theta \in B[a,b]$.

Selanjutnya, akan dilakukan uji subruang sebagaimana pada Definsi 2.1.5. Ambil sebarang $f, g \in C[a,b]$ dan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Berdasarkan Teorema 4.2.2 dan 4.2.3 diperoleh $\alpha f + \beta g \in C[a,b]$. Ini berarti, himpunan $C[a,b]$ merupakan subruang linear dari $B[a,b]$. Hal ini juga menunjukkan bahwa $C[a,b]$ merupakan ruang vektor atas $\mathbb{R}$. □

Teorema 4.2.5. [3,6] *Diberikan ruang vektor* $C[a,b]$ *dan didefinisikan suatu fungsi* $\|.\|_{C[a,b]}$ *sebagai berikut:*

$$\|f\|_{C[a,b]} := \sup_{t \in [a,b]} |f(t)|, \quad f \in C[a,b].$$

Fungsi $\|.\|_{C[a,b]}$ *merupakan norma pada* $C[a,b]$ *dan biasa disebut* ***norma supremum*** *atau norma baku pada* $C[a,b]$ *dan biasa ditulis* $\|.\|_\infty$. *Pasangan* $(C[a,b], \|.\|_\infty)$ *merupakan ruang bernorma.*

Bukti. Akan ditunjukkan bahwa fungsi $\|.\|_\infty$ merupakan norma pada $C[a,b]$. Dengan kata lain, akan ditunjukkan bahwa $\|.\|_\infty$ memenuhi syarat-syarat yang ada pada Definsi 2.2.1. Ambil sebarang $f, g \in C[a,b]$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$.

(N1)

$$\|f\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]} |f(t)| \geq 0$$

sebab $|f(t)| \geq 0, \forall t \in [a,b]$ berakibat

$$\sup_{t\in[a,b]} |f(t)| \geq 0.$$

Jadi, $\|f\|_\infty \geq 0$

(N2) Jika $\|f\|_\infty = 0$ berarti

$$\sup_{t\in[a,b]} |f(t)| = 0. \tag{4.5}$$

Karena $|f(t)| \geq 0, \forall t \in [a,b]$ sehingga satu-satunya yang memenuhi persamaan (4.5) adalah $f(t) = 0, \forall t \in [a,b]$ atau dengan kata lain $f = \theta$.
Sebaliknya, jika $f = \theta$ artinya $f(t) = 0, \forall t \in [a,b]$ akibatnya $|f(t)| = 0$, $\forall t \in [a,b]$ maka

$$\sup_{t\in[a,b]} |f(t)| = 0.$$

Dengan demikian diperoleh bahwa $\|f\|_\infty = 0$. Jadi, dapat ditunjukkan bahwa $\|f\|_\infty = 0$ jika dan hanya jika $f = \theta$.

(N3)

$$\begin{aligned} \|\alpha f\|_\infty &= \sup_{t\in[a,b]} |\alpha f(t)| \\ &= \sup_{t\in[a,b]} |\alpha||f(t)| \\ &= |\alpha| \sup_{t\in[a,b]} |f(t)| \\ &= |\alpha|\|f\|_\infty. \end{aligned}$$

(N4)
$$\begin{aligned} \|f+g\|_\infty &= \sup_{t\in[a,b]} |f(t)+g(t)| \\ &\leq \sup_{t\in[a,b]} |f(t)| + \sup_{t\in[a,b]} |g(t)| \\ &= \|f\|_\infty + \|g\|_\infty . \end{aligned}$$

Jadi, diperoleh $\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa $\|.\|_\infty$ merupakan norma pada $C[a,b]$. Jadi, $C[a,b]$ adalah ruang bernorma.

□

Selanjutya diberikan beberapa teorema dan lemma terkait himpunan $C[a,b]$ yang berguna untuk menunjukkan bahwa $C[a,b]$ merupakan ruang Banach.

Teorema 4.2.6. [8] *Misalkan $I := [a,b]$ adalah suatu selang terbatas tertutup dan $f : I \to \mathbb{R}$ adalah fungsi kontinu pada I maka f terbatas pada I.*

Lemma 4.2.7. [8] *Suatu barisan fungsi (f_n) terbatas pada $A \subseteq \mathbb{R}$ konvergen seragam pada A jika dan hanya $\|f_n - f\|_\infty \to 0$.*

Teorema 4.2.8. [8] *Misalkan (f_n) adalah barisan fungsi kontinu pada himpunan $A \subseteq \mathbb{R}$ dan jika (f_n) konvergen seragam pada A ke suatu fungsi $f : A \to \mathbb{R}$ maka f kontinu pada A.*

Berdasarkan teorema dan lemma tersebut dapat ditunjukkan bahwa ruang bernorma $C[a,b]$ merupakan ruang Banach dengan norma supremum.

Teorema 4.2.9. [3] *Ruang bernorma $C[a,b]$ adalah ruang Banach dengan norma supremum.*

Bukti. Pada Teorema 4.2.4, telah ditunjukkan bahwa $C[a,b]$ dengan norma supremum merupakan ruang bernorma. Dengan demikian, cukup ditunjukkan bahwa $C[a,b]$ adalah ruang bernorma yang lengkap. Misalkan barisan (f_n) adalah barisan Cauchy di $C[a,b]$, hal ini berarti untuk sebarang $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli N sedemikian hingga $n, m \geq N$ berlaku

$$\|f_m - f_n\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]} |f_m(t) - f_n(t)| < \varepsilon. \tag{4.6}$$

Untuk sebarang $t = t_0 \in [a,b]$ tetap diperoleh

$$|f_m(t_0) - f_n(t_0)| < \varepsilon \qquad \text{untuk } m, n \geq N.$$

Artinya barisan $(f_1(t_0), f_2(t_0), \ldots)$ adalah barisan Cauchy di $\mathbb{R}$. Karena $\mathbb{R}$ lengkap akibatnya barisan ini konvergen, misalkan $f_n(t_0) \to f(t_0)$ saat $n \to \infty$. Hal ini tetap dapat dilakukan untuk setiap $t \in [a,b]$ diperoleh $f(t)$ yang mendefinisikan suatu fungsi f pada $[a,b]$.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $f \in C[a,b]$ dan $f_n \to f$. Dari (4.6) dengan $m \to \infty$ diperoleh

$$\sup_{t\in[a,b]} |f(t) - f_n(t)| = \sup_{t\in[a,b]} |f_n(t) - f(t)| < \varepsilon \qquad \text{untuk } n \geq N.$$

Menurut Lemma 4.2.7 barisan $(f_n(t))$ konvergen seragam ke $f(t)$ pada $[a,b]$. Karena f_n adalah fungsi-fungsi yang kontinu pada $[a,b]$ dan konvergensinya seragam sehingga limit fungsinya, yaitu f kontinu di $[a,b]$ berdasarkan Teorema 4.2.8. Jadi, $f \in C[a,b]$ dan $f_n \to f$. Hal ini menunjukkan bahwa $C[a,b]$ adalah ruang bernorma lengkap norma $\|.\|_\infty$. Dengan demikian, $C[a,b]$ adalah ruang Banach. $\square$

Pada sub bab berikutnya akan dibahas mengenai ruang $C'[a,b]$ beserta sifat-sifatnya.

4.3 Ruang $C'[a,b]$

Ruang $C'[a,b]$ dalam tugas akhir ini digunakan sebagai domain dari operator linear yang akan diselidiki sifat kekontinuan dan keterbatasannya pada ruang bernorma cone. Sama halnya dengan ruang $C[a,b]$, pada bagian ini akan dibahas mengenai definisi ruang $C'[a,b]$, ruang bernorma $C'[a,b]$, dan ruang Banach $C'[a,b]$.

Definisi 4.3.1. [3] *$C'[a,b]$ adalah himpunan dari semua fungsi bernilai real yang turunan pertamanya ada dan turunannya kontinu pada selang $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$.*

Adapun beberapa sifat terkait fungsi yang terdifferensial (dapat diturunkan) tercantum dalam teorema berikut ini.

Teorema 4.3.2. [8] *Diberikan $I \subseteq \mathbb{R}$ adalah suatu interval, $c \in I$, $f : I \to \mathbb{R}$, dan $g : I \to \mathbb{R}$ keduanya merupakan fungsi yang dapat diturunkan di c maka berlaku:*

(a) *Jika $\alpha \in \mathbb{R}$ maka fungsi αf adalah fungsi yang dapat diturunkan di c dan $(\alpha f)'(c) = \alpha f'(c)$.*

(b) *fungsi $f + g$ dapat diturunkan di c dan $(f + g)'(c) = f'(c) + g'(c)$.*

Ruang $C'[a,b]$ merupakan ruang bernorma. Hal ini dapat dilihat pada teorema berikut ini.

Teorema 4.3.3. [3] *Diberikan ruang $C'[a,b]$ serta didefinisikan fungsi $\|.\|_{C'}$ sebagai berikut:*

$$\|f\|_{C'} := \sup_{t\in[a,b]} |f(t)| + \sup_{t\in[a,b]} |f'(t)|$$

atau dengan kata lain

$$\|f\|_{C'} := \|f\|_{\infty} + \|f'\|_{\infty}, \quad \forall f \in C'[a,b].$$

Fungsi $\|.\|_{C'}$ merupakan norma pada $C'[a,b]$. Lebih lanjut, $C'[a,b]$ merupakan ruang bernorma.

Bukti. Terlebih dahulu akan ditunjukkan bahwa $C'[a,b]$ merupakan ruang vektor atas $\mathbb{R}$. Berdasarkan Definisi 4.3.1 jelas bahwa $C'[a,b] \subseteq C[a,b]$ dan $C'[a,b] \neq \emptyset$. Selanjutnya, akan dilakukan uji subruang yaitu untuk semua $f, g \in C'[a,b]$ dan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ berlaku $\alpha f + \beta g \in C'[a,b]$. Dari Teorema 4.2.2, 4.2.3, dan 4.3.2 diperoleh bahwa $\alpha f + \beta g$ merupakan fungsi yang dapat diturunkan pada $[a,b]$ dan turunan pertamanya kontinu pada $[a,b]$. Dengan kata lain, $\alpha f + \beta g \in C'[a,b]$. Hal ini menunjukkan bahwa $C'[a,b]$ adalah subruang linear dari $C[a,b]$ sehingga $C'[a,b]$ merupakan ruang vektor atas $\mathbb{R}$.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa fungsi $\|.\|_{C'}$ merupakan norma pada $C'[a,b]$. Berarti akan ditunjukkan bahwa $\|.\|_{C'}$ memenuhi syarat-syarat pada Definsi 2.2.1. Ambil sebarang $f, g \in C'[a,b]$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$.

(N1)
$$\|f\|_{C'} = \sup_{t\in[a,b]} |f(t)| + \sup_{t\in[a,b]} |f'(t)| \geq 0$$

sebab $|f(t)| \geq 0, \forall t \in [a,b]$ berakibat $|f'(t)| \geq 0$, $\forall t \in [a,b]$. Demikian pula

$$\sup_{t\in[a,b]} |f(t)| + \sup_{t\in[a,b]} |f'(t)| \geq 0.$$

Jadi, $\|f\|_{C'} \geq 0$

(N2) Jika $\|f\|_{C'} = 0$ berarti

$$\sup_{t\in[a,b]} |f(t)| + \sup_{t\in[a,b]} |f'(t)| = 0. \tag{4.7}$$

Karena $|f(t)| \geq 0$ berakibat $|f'(t)| \geq 0, \forall t \in [a,b]$ sehingga satu-satunya yang memenuhi persamaan (4.7) adalah $f(t) = 0, \forall t \in [a,b]$ atau dengan kata lain $f = \theta$. Sebaliknya, jika $f = \theta$ artinya $f(t) = 0, \forall t \in [a,b]$ akibatnya $|f(t)| = |f'(t)| = 0, \forall t \in [a,b]$ maka

$$\sup_{t\in[a,b]} |f(t)| + \sup_{t\in[a,b]} |f'(t)| = 0.$$

Jadi, $\|f\|_{C'} = 0$. Dengan demikian dapat dikatakan bahwa $\|f\|_{C'} = 0$ jika dan hanya jika $f = \theta$.

(N3)
$$\begin{aligned} \|\alpha f\|_{C'} &= \|\alpha f\|_\infty + \|\alpha f'\|_\infty \\ &= |\alpha|\|f\|_\infty + |\alpha|\|f'\|_\infty \\ &= |\alpha|\|f\|_\infty + |\alpha|\|f'\|_\infty \\ &= |\alpha|(\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty) \\ &= |\alpha|\|f\|_{C'}. \end{aligned}$$

(N4)
$$\begin{aligned} \|f+g\|_{C'} &= \|f+g\|_\infty + \|f'+g'\|_\infty \\ &\leq (\|f\|_\infty + \|g\|_\infty) + (\|f'\|_\infty + \|g'\|_\infty) \\ &= (\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty) + (\|g\|_\infty + \|g'\|_\infty) \\ &= \|f\|_{C'} + \|g\|_{C'}. \end{aligned}$$

Jadi, diperoleh $\|f+g\|_{C'} \leq \|f\|_{C'} + \|g\|_{C'}$.

Dengan terpenuhinya syarat-syarat (N1)-(N4) dapat dikatakan bahwa $\|.\|_{C'}$ adalah norma pada $C'[a,b]$. Lebih lanjut, $(C'[a,b], \|.\|_{C'})$ merupakan ruang bernorma. □

Berikutnya akan ditunjukkan bahwa ruang $C'[a,b]$ merupakan ruang Banach. Namun sebelumnya, diberikan lemma yang berguna untuk menunjukkan bahwa $C'[a,b]$ adalah ruang Banach.

Lemma 4.3.4. [8] *Misalkan (f_n) adalah barisan fungsi terbatas pada $A \subseteq \mathbb{R}$. Barisan fungsi (f_n) konvergen seragam pada A ke fungsi terbatas f jika dan hanya jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $H(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga untuk semua $m, n \geq H(\varepsilon)$ berlaku $\|f_m - f_n\|_\infty \leq \varepsilon$.*

Bila diperhatikan, ruang $C'[a,b] \subseteq C[a,b] \subseteq B[a,b]$. Dengan demikian, fungsi-fungsi yang berada di $C'[a,b]$ terbatas pada $[a,b]$. Dengan kata lain, barisan fungsi (f_n) di $C'[a,b]$

konvergen seragam pada $[a, b]$ ke $f \in C'[a, b]$ jika dan hanya jika barisan (f_n) merupakan barisan Cauchy di $C'[a, b]$ dengan norma supremum.

Teorema 4.3.5. *Ruang bernorma $C'[a, b]$ adalah ruang Banach dengan norma $\|.\|_{C'}$*

Bukti. Akan ditunjukkan bahwa ruang bernorma $C'[a, b]$ merupakan ruang Banach berarti akan ditunjukkan bahwa $C'[a, b]$ mempunyai sifat bahwa setiap barisan Cauchy di $C'[a, b]$ konvergen di $C'[a, b]$ dengan norma $\|.\|_{C'}$. Telah ditunjukkan pada Teorema 4.3.3 bahwa $C'[a, b]$ merupakan ruang bernorma, dengan demikian cukup ditunjukkan bahwa barisan Cauchy di $C'[a, b]$ mempunyai limit (konvergen) di $C'[a, b]$.

Ambil sebarang barisan Cauchy (f_n) di $C'[a, b]$ dengan norma $\|.\|_{C'}$. Dengan demikian untuk sebarang $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli N sedemikian hingga untuk $n, m \geq N$ berlaku $\|f_n - f_m\|_{C'} < \varepsilon$. Di lain pihak untuk $n, m \geq N$ juga berlaku $\|f_n - f_m\|_\infty \leq \|f_n - f_m\|_{C'} < \varepsilon$. Hal ini berarti barisan (f_n) merupakan barisan Cauchy di $C[a, b]$. Demikian pula $\|f'_n - f'_m\|_\infty \leq \|f_n - f_m\|_{C'} < \varepsilon$, yang berarti barian (f'_n) barisan Cauchy di $C[a, b]$. Telah ditunjukkan sebelumnya pada Teorema 4.2.9 bahwa $C[a, b]$ adalah ruang bernorma yang lengkap sehingga sebarang barisan Cauchy di $C[a, b]$ konvergen di $C[a, b]$. Menurut Lemma 4.3.4 terdapat $f, g \in C[a, b]$ sedemikian hingga $f_n \rightrightarrows f$ dan $f'_n \rightrightarrows g$ dengan norma supremum.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $f \in C'[a, b]$ dan $f_n \to f$. Misal untuk sebarang $t \in [a, b]$ dan $h \in \mathbb{R}$ tetap sedemikian hingga $t + h \in [a, b]$ berlaku

$$\frac{1}{h}(f(t + h) - f(t)) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{h}(f_n(t + h) - f_n(t))$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{h} \int_0^h f_n'(t+x)dx.$$

Karena $f_n' \rightrightarrows g$ akibatnya

$$\begin{aligned} \frac{1}{h}(f(t+h)-f(t)) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{h} \int_0^h f_n'(t+x)dx \\ &= \frac{1}{h} \int_0^h g(t+x)dx. \end{aligned}$$

dan $g \in C[a,b]$ adalah fungsi kontinu pada $[a,b]$ akibatnya limitnya saat $h \to 0$ ada. Oleh karena itu diperoleh

$$\begin{aligned} f'(t) &= \lim_{h\to\infty} \frac{1}{h}(f(t+h)-f(t)) \\ &= \lim_{h\to\infty} \frac{1}{h} \int_0^h g(t+x)dx \\ &= g(t). \end{aligned}$$

Jadi, $f' = g$ dan hal ini menunjukkan bahwa $f \in C'[a,b]$.

Untuk menunjukkan $f_n \to f$ dengan norma C' atau dengan kata lain $\|f_n - f\|_{C'} \to 0$, berdasarkan Definisi 4.3.3 diperoleh

$$\|f_n - f\|_{C'} = \|f_n - f\|_\infty + \|f_n' - f'\|_\infty.$$

Karena $f_n \rightrightarrows f$ dan $f_n' \rightrightarrows f$ dengan norma supremum akibatnya $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ dan $\|f_n' - f'\|_\infty \to 0$ saat $n \to \infty$ sehingga $\|f_n - f\|_{C'} \to 0$ saat $n \to \infty$. Dengan demikian, $f_n \to f$ dengan norma C'. Karena (f_n) adalah sebarang barisan Cauchy di $C'[a,b]$ berarti $C'[a,b]$ adalah ruang bernorma lengkap. Jadi, ruang bernorma $C'[a,b]$ merupakan ruang Banach dengan norma $\|.\|_{C'}$.

$\square$

4.4 Himpunan Cone P_{ℓ^1}

Sebelum membahas mengenai ruang bernorma cone $C'[a,b]$ bernilai ℓ^1 dan ruang bernorma cone $C[a,b]$ bernilai ℓ^1 akan dicari himpunan cone dari ℓ^1. Pada bagian ini dibahas mengenai himpunan cone P_{ℓ^1} yang merupakan himpunan cone dari ℓ^1.

Teorema 4.4.1. [2] *Diberikan ruang Banach ℓ^1 dan $P_{\ell^1} \subseteq \ell^1$ yang didefinisikan*

$$P_{\ell^1} := \{\bar{x} \in \ell^1 : \bar{x} = (x_i) = (x_1, x_2, \ldots), x_i \geq 0, \forall i \in \mathbb{N}\}.$$

Himpunan P_{ℓ^1} adalah himpunan cone normal dari ruang Banach ℓ^1 dengan konstanta normal 1.

Bukti. Akan ditunjukkan bahwa P_{ℓ^1} merupakan himpunan cone dari ℓ^1 kemudian akan ditunjukkan bahwa P_{ℓ^1} merupakan cone normal dengan konstanta normal 1. Berdasarkan Definisi 2.3.1 akan ditunjukkan bahwa P_{ℓ^1} memenuhi syarat-syarat (C1)-(C3).

(C1) Pertama, akan ditunjukkan bahwa $P_{\ell^1} \neq \emptyset$.
Pilih $\bar{y} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots) \in P_{\ell^1}$. Hal ini menunjukkan bahwa $P_{\ell^1} \neq \emptyset$ dan $P_{\ell^1} \neq \{\bar{0}\}$, dengan $\bar{0} = (0, 0, \ldots)$ adalah vektor nol di ℓ^1.
Kedua, akan ditunjukkan bahwa $P_{\ell^1} \subseteq \ell^1$.
Berdasarkan definisi dari P_{ℓ^1} jelas bahwa $P_{\ell^1} \subseteq \ell^1$ sebab jika diambil sebarang $\bar{x} \in P_{\ell^1}$ maka $\bar{x} \in \ell^1$.
Ketiga, akan ditunjukkan bahwa P_{ℓ^1} adalah himpunan tertutup.
Misalkan $(\bar{x}_n)$ adalah sebarang barisan di P_{ℓ^1} yang konvergen ke $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots)$. Akan ditunjukkan bahwa $\bar{x} \in P_{\ell^1}$. Barisan $(\bar{x}_n)$ konvergen ke $\bar{x}$, artinya untuk sebarang $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli N sedemikian

hingga untuk $n \geq N$ berlaku

$$\|\bar{x}_n - \bar{x}\|_{\ell^1} = \sum_{i=1}^{\infty} |x_{ni} - x_i| < \varepsilon. \tag{4.8}$$

Dari (4.8) dapat dikatakan $\bar{x}_n - \bar{x} = (x_{ni} - x_i) \in \ell^1$. Misalkan $\bar{x} := \bar{x}_n + (\bar{x} - \bar{x}_n)$. Di lain pihak, $\bar{x}_n \in P_{\ell^1}$ akibatnya $\bar{x}_n \in \ell^1$. Dari pertidaksamaan Minkowski didapatkan

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| &= \sum_{i=1}^{\infty} |x_{ni} + (x_i - x_{ni})| \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} |x_{ni}| + \sum_{i=1}^{\infty} |x_{ni} - x_i| \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Jadi, $\bar{x} = (x_i) \in \ell^1$. Kemudian, akan ditunjukkan bahwa $\bar{x} = (x_i) \in P_{\ell^1}$. Dengan kontradiksi, andaikan kesimpulan salah yaitu $\bar{x} = (x_i) \notin P_{\ell^1}$. Artinya terdapat i tertentu sehingga $x_i < 0$. Dari (4.8) dapat diperoleh $|x_i - x_{ni}| < \varepsilon$ atau $-\varepsilon < x_{ni} - x_i < \varepsilon$. Bila dimisalkan $x_i = -x_i^*$ dengan x_i^* positif akan diperoleh $x_{ni} + x_i^* < \varepsilon$ sehingga $x_i^* < \varepsilon - x_{ni}$. Karena nilai ε adalah sebarang sehingga dapat dipilih $\varepsilon := x_{ni}$ akibatnya $x_i^* < 0$ atau x_i^* bernilai negatif. Hal ini kontradiksi dengan pernyataan x_i^* positif. Jadi, yang benar adalah $\bar{x} = (x_i) \in P_{\ell^1}$. Dengan demikian, sebarang barisan $(\bar{x}_n)$ konvergen ke $\bar{x} \in P_{\ell^1}$. Dengan kata lain, himpunan P_{ℓ^1} tertutup.

(C2) Akan ditunjukkan bahwa untuk $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \geq 0$ dan $\bar{x}, \bar{y} \in P_{\ell^1}$ berakibat $\alpha\bar{x} + \beta\bar{y} \in P_{\ell^1}$. Dengan kata lain akan ditunjukkan bahwa jumlahan absolut dari nilai-nilai barisan $\alpha\bar{x} + \beta\bar{y}$ konvergen. Ambil sebarang $\bar{x}, \bar{y} \in P_{\ell^1}$ artinya $\bar{x} = (x_i), \bar{y} = (y_i)$ dengan

$x_i, y_i \geq 0, \forall i \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| < \infty$ dan $\sum_{i=1}^{\infty} |y_i| < \infty$. Dengan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ dan $\alpha, \beta \geq 0$ akibatnya

$$\begin{aligned} \alpha\bar{x} + \beta\bar{y} &= \alpha(x_i) + \beta(y_i) \\ &= (\alpha x_i) + (\beta y_i) \\ &= (\alpha x_i + \beta y_i). \end{aligned}$$

Karena $\alpha, \beta, x_i, y_i \geq 0 \in \mathbb{R}$ untuk $i \in \mathbb{N}$ berakibat $\alpha x_i + \beta y_i \geq 0 \in \mathbb{R}$ dan dari pertidaksamaan Minkowski diperoleh

$$\begin{aligned} \sum_{i=i}^{\infty} |\alpha x_i + \beta y_i| &\leq \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha x_i| + \sum_{i=1}^{\infty} |\beta y_i| \\ &= \alpha \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| + \beta \sum_{i=1}^{\infty} |y_i| \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Dengan demikian, $\alpha\bar{x} + \beta\bar{y} \in P_{\ell^1}$.

(C3) Selanjutnya akan dicari himpunan $-P_{\ell^1}$ sedemikian hingga $P_{\ell^1} \cap -P_{\ell^1} = \{\bar{0}\}$. Berdasarkan definisi P_{ℓ^1} satu-satunya yang memenuhi $P_{\ell^1} \cap -P_{\ell^1} = \{\bar{0}\}$ adalah himpunan

$$-P_{\ell^1} = \{-\bar{x} \in \ell^1 : -\bar{x} = (-x_i) = (-x_1, -x_2, \ldots), x_i \geq 0, \forall i \in \mathbb{N}\}.$$

Jadi, diperoleh himpunan $-P_{\ell^1} = \{-\bar{x} \in \ell^1 : -\bar{x} = (-x_i) = (-x_1, -x_2, \ldots), x_i \geq 0, \forall i \in \mathbb{N}\}$ sedemikan hingga $P_{\ell^1} \cap -P_{\ell^1} = \{\bar{0}\}$.

Karena syarat-syarat (C1)-(C3) dipenuhi bagi himpunan P_{ℓ^1}. Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa himpunan P_{ℓ^1} adalah himpunan cone.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa P_{ℓ^1} adalah himpunan cone normal dengan konstanta normal 1. Ambil sebarang $\bar{x}, \bar{y} \in \ell^1$ yang memenuhi $\bar{0} \preceq \bar{x} \preceq \bar{y}$. Hal ini berarti $\bar{y} - \bar{x} \in P_{\ell^1}$. Di sisi lain, $\bar{y} = (y_i)$ dan $\bar{x} = (x_i)$ untuk $i \in \mathbb{N}$ sehingga $\bar{y} - \bar{x} = (y_i) - (x_i) = (y_i - x_i) \in P_{\ell^1}$, yang berarti $y_i - x_i \geq 0, \forall i \in \mathbb{N}$. Oleh karena itu, diperoleh $y_i \geq x_i$, $\forall i \in \mathbb{N}$. Akibatnya $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |y_i|$ atau dengan kata lain $\|\bar{x}\| \leq \|\bar{y}\|$. Jadi, diperoleh konstanta normal $K = 1$. $\square$

Notasi yang digunakan dalam himpunan cone, terutama "$\ll$" berkaitan dengan interior dari himpunan cone itu sendiri. Telah diperoleh bahwa P_{ℓ^1} merupakan himpunan cone dari ℓ^1. Oleh karena itu, akan dicari interior dari himpunan cone P_{ℓ^1}. Hal ini tercantum dalam teorema berikut ini.

Teorema 4.4.2. *Himpunan semua titik interior dari P_{ℓ^1} adalah himpunan*

$$\{\bar{x} \in \ell^1 : \bar{x} = (x_i), x_i > 0, \forall i \in \mathbb{N}\}.$$

Untuk selanjutnya, interior dari P_{ℓ^1} dinotasikan dengan $intP_{\ell^1}$.

Bukti. Jelas bahwa $P_{\ell^1} \subseteq \ell^1$ dan persekitaran δ dari $\bar{x} \in P_{\ell^1}$ adalah

$$B(\bar{x}, \delta) = \left\{ \bar{y} \in \ell^1 : \|\bar{x} - \bar{y}\|_{\ell^1} = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i| < \delta \right\}$$

untuk suatu $\delta > 0$. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa setiap titik di $intP_{\ell^1}$ adalah titik interior dari P_{ℓ^1}. Jelas bahwa $intP_{\ell^1} \subseteq P_{\ell^1}$. Ambil sebarang $\bar{x} \in intP_{\ell^1}$, dari Contoh 2.2.17 diperoleh $\delta > 0$ dengan

$$\delta = \min\{\|\bar{x} - \bar{y}\|_{\ell^1}\} = \min \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i| \right\}$$

untuk $\bar{y} \in \partial P_{\ell^1} = \{\bar{z} \in \ell^1 : \bar{z} = (z_i), z_i = 0, i \in \mathbb{N}\}$ sedemikian hingga $B(\bar{x}, \delta) \subseteq P_{\ell^1}$, ini berarti titik $\bar{x} \in intP_{\ell^1}$ adalah titik interior dari P_{ℓ^1}. Karena pemilihan $\bar{x} \in intP_{\ell^1}$ sebarang sehingga dapat disimpulkan bahwa setiap titik di $intP_{\ell^1}$ adalah titik interior dari P_{ℓ^1}.

Kemudian, akan ditunjukkan bahwa ∂P_{ℓ^1} bukan titik interior dari P_{ℓ^1}. Andaikan setiap titik di ∂P_{ℓ^1} adalah titik interior dari P_{ℓ^1} berarti untuk setiap $\bar{x} \in \partial P_{\ell^1}$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian hingga $B(\bar{x}, \delta) \subseteq P_{\ell^1}$. Tetapi untuk $\bar{0} \in \partial P_{\ell^1}$ diperoleh

$$\begin{aligned} \delta &= \min\{\|\bar{0} - \bar{z}\|_{\ell^1}\} \\ &= \min\left\{\sum_{i=1}^{\infty} |0 - z_i|\right\} \\ &= \min\left\{\sum_{i=1}^{\infty} |z_i|\right\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

sebab terdapat $\bar{z} = \bar{0} \in \partial P_{\ell^1}$. Hal ini menunjukkan kontradiksi dengan pernyataan $\delta > 0$. Jadi, ∂P_{ℓ^1} bukan titik interior dari P_{ℓ^1}. $\square$

Pembahasan selanjutnya adalah ruang bernorma cone $C'[a, b]$ bernilai ℓ^1 dan ruang bernorma cone $C[a, b]$ bernilai ℓ^1.

4.5 Ruang Bernorma Cone $C[a, b]$ Bernilai ℓ^1

Gordji, dkk telah menyebutkan dalam [2] bahwa sebarang ruang bernorma $(X, \|.\|_X)$ dapat dikonstruksi suatu norma cone yang bernilai ℓ^1 dengan mendefinsikan fungsi norma cone

$$\|x\|_X^{\ell^1} := \left(\frac{\|x\|_X}{2}, \frac{\|x\|_X}{2^2}, \dots\right) = \left(\frac{\|x\|_X}{2^n}\right),$$

untuk setiap $x \in X$. Dalam tugas akhir ini, penulis mengambil ruang bernorma $C[a,b]$ dan $C'[a,b]$. Pada sub bab ini akan dijelaskan mengenai ruang bernorma cone $C[a,b]$ bernilai ℓ^1.

Teorema 4.5.1. *Diberikan ruang bernorma $C[a,b]$ dengan norma supremum $\|.\|_\infty$ dan fungsi $\|.\|_C^{\ell^1} : C[a,b] \to \ell^1$ yang didefinisikan untuk setiap $f \in C[a,b]$ berlaku*

$$\|f\|_C^{\ell^1} := \left(\frac{\|f\|_\infty}{2}, \frac{\|f\|_\infty}{2^2}, \ldots\right) = \left(\frac{\|f\|_\infty}{2^n}\right)$$

dengan $n \in \mathbb{N}$. Fungsi $\|.\|_C^{\ell^1}$ merupakan norma cone pada $C[a,b]$. Pasangan $(C[a,b], \|.\|_C^{\ell^1})$ disebut ruang bernorma cone $C[a,b]$ bernilai ℓ^1 atau singkatnya ruang bernorma cone $C[a,b]$.

Bukti. Sebelumnya akan ditunjukkan bahwa fungsi $\|.\|_\infty$ adalah fungsi *well-defined.*

(a) Ambil sebarang $f \in C[a,b]$ sehingga $\|f\|_C^{\ell^1} = \left(\frac{\|f\|_\infty}{2^n}\right)$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Akan ditunjukkan bahwa $\|f\|_C^{\ell^1} \in \ell^1$, dengan kata lain akan ditunjukkan bahwa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\|f\|_\infty}{2^n}\right| < \infty.$$

Karena $\|f\|_\infty \geq 0$ dan $2^n > 0$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ akibatnya

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\|f\|_\infty}{2^n}\right| &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|f\|_\infty}{2^n} \\ &= \|f\|_\infty \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \\ &= \|f\|_\infty \, 1 \\ &= \|f\|_\infty. \end{aligned}$$

Di sisi lain, karena $f \in C[a,b]$ sehingga f terbatas pada $[a,b]$ akibatnya $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\|f\|_\infty}{2^n} \right| = \|f\|_\infty < \infty$. Jadi, untuk sebarang $f \in C'[a,b]$ diperoleh $\|f\|_C^{\ell^1} = \left(\frac{\|f\|_\infty}{2^n} \right) \in \ell^1$.

(b) Diberikan $f, g \in C[a,b]$ dan $f = g$ berarti $f(t) = g(t)$, $\forall t \in [a,b]$ akibatnya $\|f\|_\infty = \|g\|_\infty$. Hal ini juga berakibat $\left(\frac{\|f\|_\infty}{2^n} \right) = \left(\frac{\|g\|_\infty}{2^n} \right), \forall n \in \mathbb{N}$ sehingga $\|f\|_C^{\ell^1} = \|g\|_C^{\ell^1}$. Jadi, untuk sebarang $f, g \in C[a,b]$ dan $f = g$ berakibat $\|f\|_C^{\ell^1} = \|g\|_C^{\ell^1}$.

Dari (a) dan (b) dapat disimpulkan bahwa fungsi $\|.\|_C^{\ell^1}$ merupakan fungsi yang *well-defined*. Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa fungsi $\|.\|_C^{\ell^1}$ merupakan norma cone pada $C[a,b]$. Menurut Definisi 2.3.9, akan ditunjukkan bahwa $\|.\|_C^{\ell^1}$ memenuhi syarat-syarat (NC1)-(NC3).

(NC1) Akan ditunjukkan bahwa untuk sebarang $f \in C[a,b]$ berakibat $\|f\|_C^{\ell^1} \succeq \bar{0}$. Telah ditunjukkan sebelumnya dalam Teorema 4.2.4 bahwa $\|.\|_\infty$ adalah norma pada $C[a,b]$ akibatnya $\frac{\|f\|_\infty}{2^n} \geq 0$, untuk semua $n \in \mathbb{N}$. Hal ini berarti $\|f\|_C^{\ell^1} \succeq \bar{0}$.
Selanjutnya, diberikan $\|f\|_C^{\ell^1} = \bar{0}$, $\forall f \in C[a,b]$, artinya $\left(\frac{\|f\|_\infty}{2^n} \right) = \bar{0}$ sehingga $\frac{\|f\|_\infty}{2^n} = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Satu-satunya yang memenuhi adalah jika $\|f\|_\infty = 0$. Karena $\|.\|_\infty$ adalah norma pada $C[a,b]$ sehingga diperoleh $f = \theta$ dengan θ adalah vektor nol pada $C[a,b]$.
Sebaliknya, jika $f = \theta$ berarti $f(t) = 0, \forall t \in [a,b]$ sehingga $\|f\|_\infty = 0$. Akibatnya

$$\|f\|_C^{\ell^1} = \left(\frac{\|f\|_\infty}{2^n} \right) = (0, 0, \ldots) = \bar{0}$$

untuk $n \in \mathbb{N}$.
Jadi, diperoleh $\|f\|_C^{\ell^1} \succeq \bar{0}$, $\forall f \in C[a,b]$ dan $\|f\|_C^{\ell^1} = \bar{0} \Longleftrightarrow f = \theta$.

(NC2) Ambil sebarang $f \in C[a,b]$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$ berlaku

$$\begin{aligned} \|\alpha f\|_C^{\ell^1} &= \left(\frac{\|\alpha f\|_\infty}{2^n}\right) \\ &= \left(\frac{|\alpha|\|f\|_\infty}{2^n}\right) \\ &= |\alpha|\left(\frac{\|f\|_\infty}{2^n}\right) \\ &= |\alpha|\|f\|_C^{\ell^1}. \end{aligned}$$

Jadi, diperoleh $\|\alpha f\|_C^{\ell^1} = |\alpha|\|f\|_C^{\ell^1}$.

(NC3) Berikutnya ambil sebarang $f_1, f_2 \in C[a,b]$ akan ditunjukkan bahwa $\|f_1 + f_2\|_C^{\ell^1} \preceq \|f_1\|_C^{\ell^1} + \|f_2\|_C^{\ell^1}$. Untuk menunjukknnya, akan lebih mudah jika terlebih dahulu ditunjukkan

$$\|f_1+f_2\|_C^{\ell^1} \preceq \|f_1\|_C^{\ell^1}+\|f_2\|_C^{\ell^1} \Longleftrightarrow \|f_1+f_2\|_\infty \leq \|f_1\|_\infty+\|f_2\|_\infty.$$

Misal diberikan $\|f_1 + f_2\|_C^{\ell^1} \preceq \|f_1\|_C^{\ell^1} + \|f_2\|_C^{\ell^1}$ berarti $\|f_1\|_C^{\ell^1} + \|f_2\|_C^{\ell^1} - \|f_1 + f_2\|_C^{\ell^1} \in P_{\ell^1}$. Dengan kata lain

$$\begin{aligned} \|f_1\|_C^{\ell^1} + \|f_2\|_C^{\ell^1} - \|f_1 + f_2\|_C^{\ell^1} &= \left(\frac{\|f_1\|_\infty}{2^n}\right) + \left(\frac{\|f_2\|_\infty}{2^n}\right) - \left(\frac{\|f_1 + f_2\|_\infty}{2^n}\right) \\ &= \left(\frac{\|f_1\|_\infty + \|f_2\|_\infty - \|f_1 + f_2\|_\infty}{2^n}\right) \in P_{\ell^1}. \end{aligned}$$

Berarti

$$\frac{\|f_1\|_\infty + \|f_2\|_\infty - \|f_1 + f_2\|_\infty}{2^n} \geq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Pertidaksamaan ini dipenuhi jika $\|f_1\|_\infty + \|f_2\|_\infty - \|f_1 + f_2\|_\infty \geq 0$ sehingga diperoleh $\|f_1\|_\infty + \|f_2\|_\infty \geq \|f_1 + f_2\|_\infty$ yang dapat ditulis ulang sebagai

$$\|f_1 + f_2\|_\infty \leq \|f_1\|_\infty + \|f_2\|_\infty.$$

Sebaliknya, jika diberikan $\|f_1 + f_2\|_\infty \leq \|f_1\|_\infty + \|f_2\|_\infty$ berarti $\|f_1\|_\infty + \|f_2\|_\infty - \|f_1 + f_2\|_\infty \geq 0$. Akibatnya untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ berlaku $\frac{\|f_1\|_\infty + \|f_2\|_\infty - \|f_1 + f_2\|_\infty}{2^n} \geq 0$ dan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\|f_1\|_\infty + \|f_2\|_\infty - \|f_1 + f_2\|_\infty}{2^n} \right| = \|f_1\|_\infty + \|f_2\|_\infty - \|f_1 + f_2\|_\infty \geq 0.$$

Ini berarti $\left(\frac{\|f_1\|_\infty + \|f_2\|_\infty - \|f_1 + f_2\|_\infty}{2^n}\right) \in P_{\ell^1}$. Dapat juga dituliskan dalam bentuk

$$\left(\frac{\|f_1\|_\infty}{2^n}\right) + \left(\frac{\|f_2\|_\infty}{2^n}\right) - \left(\frac{\|f_1 + f_2\|_\infty}{2^n}\right) = \|f_1\|_C^{\ell^1} + \|f_2\|_C^{\ell^1} - \|f_1 + f_2\|_C^{\ell^1}.$$

Dengan demikian, $\|f_1\|_C^{\ell^1} + \|f_2\|_C^{\ell^1} - \|f_1 + f_2\|_C^{\ell^1} \in P_{\ell^1}$ sehingga diperoleh

$$\|f_1 + f_2\|_C^{\ell^1} \preceq \|f_1\|_C^{\ell^1} + \|f_2\|_C^{\ell^1}.$$

Jadi, $\|f_1 + f_2\|_C^{\ell^1} \preceq \|f_1\|_C^{\ell^1} + \|f_2\|_C^{\ell^1}$.

Dengan demikian, syarat-syarat (NC1)-(NC3) terpenuhi. Jadi, fungsi $\|.\|_C^{\ell^1}$ merupakan norma cone pada $C[a, b]$. □

Berdasarkan sifat konvergensi barisan dan barisan Cauchy di ruang bernorma $C[a, b]$ dapat diperoleh suatu keterkaitan antara ruang bernorma $C[a, b]$ dengan ruang bernorma cone $C[a, b]$ yang disajikan dalam proposisi berikut ini.

Proposisi 4.5.2. *Diberikan ruang bernorma cone $C[a, b]$ dan $f \in C[a, b]$. Jika (f_n) adalah barisan di $C[a, b]$ maka pernyataan berikut berlaku:*

(a) *Barisan (f_n) dalam ruang bernorma cone $C[a,b]$ konvergen ke $f \in C[a,b]$ jika dan hanya jika barisan (f_n) dalam ruang bernorma $C[a,b]$ konvergen ke f.*

(b) *Barisan (f_n) adalah barisan Cauchy dalam ruang bernorma cone $C[a,b]$ jika dan hanya jika barisan (f_n) adalah barisan Cauchy dalam ruang bernorma $C[a,b]$.*

Bukti.

(a) Misalkan barisan (f_n) dalam ruang bernorma cone $(C[a,b], \|.\|_C^{\ell^1})$ konvergen ke f artinya untuk sebarang $\bar{c} \in \ell^1$ dengan $\bar{c} \gg \bar{0}$ terdapat bilangan asli N sedemikian hingga $\|f_n - f\|_C^{\ell^1} \ll \bar{c}$ untuk semua $n \geq N$. Jadi, untuk $n \geq N$ berlaku $\left(\frac{\|f_n - f\|_\infty}{2^k}\right) \ll (c_k)$ dengan $k \in \mathbb{N}$. Di lain pihak, untuk sebarang $\varepsilon > 0$ ambil suatu $\bar{c}_\varepsilon \in intP_{\ell^1}$ sedemikian hingga $\sum_{k=1}^\infty |c_{\varepsilon_k}| = \varepsilon$ akibatnya $\sum_{k=1}^\infty \left|\frac{\|f_n - f\|_\infty}{2^k}\right| < \sum_{k=1}^\infty |c_{\varepsilon_k}| = \varepsilon$. Dengan kata lain, $\|f_n - f\|_\infty < \varepsilon$. Hal ini berarti barisan (f_n) konvergen ke f di $(C[a,b], \|.\|_\infty)$. Sebaliknya, jika diberikan barisan (f_n) dalam ruang bernorma $(C[a,b], \|.\|_\infty)$ yang konvergen ke f artinya untuk sebarang $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli N sedemikian hingga untuk $n \geq N$ berlaku $\|f_n - f\|_\infty < \varepsilon$. Di lain pihak, $\forall \bar{c} \in \ell^1$, $\bar{c} \gg \bar{0}$ dengan $\bar{c} = (c_k)$ untuk $k \in \mathbb{N}$ ambil suatu $\varepsilon_{\bar{c}}$ sedemikian hingga $\frac{\|f_n - f\|_\infty}{2^k} < c_k$ untuk setiap $k \in \mathbb{N}$. Dengan demikian untuk $n \geq N$ berlaku $\frac{\|f_n - f\|_\infty}{2^k} < c_k$ untuk setiap $k \in \mathbb{N}$. Karena $\bar{c} \gg \bar{0}$ berarti $\bar{c} \in intP_{\ell^1}$ sehingga $c_k > 0, \forall k \in \mathbb{N}$. Demikian pula, $\|f_n - f\|_\infty \geq 0$ berakibat $\frac{\|f_n - f\|_\infty}{2^k} \geq 0$ dan $c_k - \frac{\|f_n - f\|_\infty}{2^k} > 0$ untuk setiap $k \in \mathbb{N}$. Ini berarti $(c_k) - \left(\frac{\|f_n - f\|_\infty}{2^k}\right) \in intP_{\ell^1}$ atau dapat dituliskan $\bar{c} - \|f_n - f\|_C^{\ell^1} \in intP_{\ell^1}$. Jadi, $\|f_n - f\|_C^{\ell^1} \ll \bar{c}$.

(b) Misalkan barisan (f_n) adalah barisan Cauchy dalam ruang bernorma cone $(C[a,b], \|.\|_C^{\ell^1})$ artinya untuk sebarang $\bar{c} \in \ell^1$ dengan $\bar{c} \gg \bar{0}$ terdapat bilangan asli N sedemikian hingga $\|f_n - f_m\|_C^{\ell^1} \ll \bar{c}$ untuk semua $n, m \geq N$. Jadi, untuk $n, m \geq N$ berlaku $\left(\frac{\|f_n - f_m\|_\infty}{2^k}\right) \ll (c_k)$ dengan $k \in \mathbb{N}$. Di lain pihak, untuk sebarang $\varepsilon > 0$ ambil suatu $\bar{c}_\varepsilon \in intP_{\ell^1}$ sedemikian hingga $\sum_{k=1}^{\infty} |c_{\varepsilon_k}| = \varepsilon$ akibatnya $\sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{\|f_n - f_m\|_\infty}{2^k}\right| < \sum_{k=1}^{\infty} |c_{\varepsilon_k}| = \varepsilon$. Dengan kata lain, $\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$. Hal ini berarti barisan (f_n) adalah barisan Cauchy dalam ruang bernorma $(C[a,b], \|.\|_\infty)$. Sebaliknya, jika diberikan barisan (f_n) adalah barisan Cauchy dalam ruang bernorma $(C[a,b], \|.\|_\infty)$ artinya untuk sebarang $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli N sedemikian hingga untuk $n, m \geq N$ berlaku $\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$. Di lain pihak, $\forall \bar{c} \in \ell^1$, $\bar{c} \gg \bar{0}$ dengan $\bar{c} = (c_k)$ untuk $k \in \mathbb{N}$ ambil suatu $\varepsilon_{\bar{c}}$ sedemikian hingga $\frac{\|f_n - f_m\|_\infty}{2^k} < c_k$ untuk setiap $k \in \mathbb{N}$. Dengan demikian untuk $n, m \geq N$ berlaku $\frac{\|f_n - f_m\|_\infty}{2^k} < c_k$ untuk setiap $k \in \mathbb{N}$. Karena $\bar{c} \gg \bar{0}$ berarti $\bar{c} \in intP_{\ell^1}$ sehingga $c_k > 0, \forall k \in \mathbb{N}$. Demikian pula, $\|f_n - f_m\|_\infty \geq 0$ berakibat $\frac{\|f_n - f_m\|_\infty}{2^k} \geq 0$ dan $c_k - \frac{\|f_n - f_m\|_\infty}{2^k} > 0$ untuk setiap $k \in \mathbb{N}$. Ini berarti $(c_k) - \left(\frac{\|f_n - f_m\|_\infty}{2^k}\right) \in intP_{\ell^1}$ atau dapat dituliskan $\bar{c} - \|f_n - f_m\|_C^{\ell^1} \in intP_{\ell^1}$. Jadi, $\|f_n - f_m\|_C^{\ell^1} \ll \bar{c}$.

□

Contoh 4.5.3. Diberikan $(f_n) \subseteq (C[a,b], \|.\|_C^{\ell^1})$ dengan $f_n(t) := \frac{t}{n} + b, \forall t \in [a,b] \subseteq \mathbb{R}$. Barisan (f_n) konvergen ke $f(t) := b$ untuk $t \in [a,b]$ dan merupakan barisan Cauchy.

Bukti. Akan ditunjukkan bahwa $\frac{t}{n}+b \to b$ untuk $t \in [a,b]$ dalam ruang bernorma cone $C[a,b]$ dengan menggunakan Proposisi 4.6.2. Sebelumnya akan ditunjukkan bahwa $\frac{t}{n}+b \to b$ dalam ruang bernorma $C[a,b]$.

$$\begin{aligned}\left\|\frac{t}{n}+b-b\right\|_\infty &= \left\|\frac{t}{n}\right\|_\infty \\ &= \sup_{t\in[a,b]}\left|\frac{t}{n}\right| \\ &= \left|\frac{b}{n}\right|.\end{aligned}$$

Untuk n yang semakin besar diperoleh $\frac{|b|}{n}$. Kemudian ambil sebarang $\varepsilon > 0$ dan pilih $N > \frac{|b|}{\varepsilon}$ sehingga untuk semua $n \geq N$ diperoleh

$$\left\|\frac{t}{n}+b-b\right\|_\infty \leq \frac{|b|}{N} < \varepsilon.$$

Karena berlaku untuk sebarang $\varepsilon > 0$ maka dapat disimpulkan bahwa $\left(\frac{t}{n}+b\right)$ konvergen ke b untuk semua $t \in [a,b]$. Demikian pula, karena barisan $\left(\frac{t}{n}+b\right)$ konvergen maka menurut Teorema 2.2.6 barisan $\left(\frac{t}{n}+b\right)$ merupakan barisan Cauchy dalam ruang bernorma $C[a,b]$. Berdasarkan Proposisi 4.6.2, barisan $\left(\frac{t}{n}+b\right)$ juga konvergen ke b dalam ruang bernorma cone $C[a,b]$ untuk $t \in [a,b]$. Demikian pula, menurut Teorema 2.3.14 barisan $\left(\frac{t}{n}+b\right)$ merupakan barisan Cauchy dalam ruang bernorma cone $C[a,b]$.

$\square$

Berdasarkan Proposisi 4.5.2 diperoleh suatu sifat berikut ini.

Akibat 4.5.4. *Ruang bernorma cone $C[a,b]$ bernilai ℓ^1 merupakan ruang Banach cone.*

Bukti. Berdasarkan Proposisi 4.5.2, didapat bahwa sebarang barisan Cauchy (f_n) dalam ruang bernorma $(C[a,b], \|.\|_\infty)$ merupakan barisan Cauchy di $(C[a,b], \|.\|_C^{\ell^1})$. Karena $(C[a,b], \|.\|_\infty)$ merupakan ruang Banach akibatnya barisan (f_n) konvergen di $(C[a,b], \|.\|_\infty)$ yang juga mengakibatkan barisan (f_n) konvergen di $(C[a,b], \|.\|_C^{\ell^1})$. Oleh karena itu, ruang bernorma cone $(C[a,b], \|.\|_C^{\ell^1})$ adalah ruang Banach cone. □

4.6 Ruang Bernorma Cone $C'[a,b]$ Bernilai ℓ^1

Pada bagian ini akan ditunjukkan bahwa ruang $C'[a,b]$ juga merupakan ruang bernorma cone bernilai ℓ^1 dengan mendefinisikan norma cone yang sama dengan ruang bernorma cone $C[a,b]$.

Teorema 4.6.1. *Diberikan ruang bernorma $C'[a,b]$ dengan norma $\|.\|_{C'}$ serta fungsi $\|.\|_{C'}^{\ell^1} : C'[a,b] \to \ell^1$ yang didefinisikan untuk setiap $f \in C'[a,b]$ berlaku*

$$\|f\|_{C'}^{\ell^1} := \left(\frac{\|f\|_{C'}}{2}, \frac{\|f\|_{C'}}{2^2}, \dots \right) = \left(\frac{\|f\|_{C'}}{2^n} \right)$$

dengan $n \in \mathbb{N}$. Fungsi $\|.\|_{C'}^{\ell^1}$ merupakan norma cone pada $C'[a,b]$. Pasangan $(C'[a,b], \|.\|_{C'}^{\ell^1})$ disebut ruang bernorma cone $C'[a,b]$ bernilai ℓ^1 atau disingkat ruang bernorma cone $C'[a,b]$.

Bukti. Dengan alur yang sama pada pembuktian ruang bernorma cone $C'[a,b]$, sebelumnya akan ditunjukkan bahwa fungsi $\|.\|_{C'}^{\ell^1}$ adalah fungsi yang *well-defined*.

(a) Ambil sebarang $f \in C'[a,b]$ sehingga $\|f\|_{C'}^{\ell^1} = \left(\frac{\|f\|_{C'}}{2^n}\right)$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Akan ditunjukkan bahwa

$\|f\|_{C'}^{\ell^1} \in \ell^1$ atau dengan kata lain akan ditunjukkan bahwa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\|f\|_{C'}}{2^n} \right| < \infty.$$

Karena $\|f\|_{C'} \geq 0$ dan $2^n > 0$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ akibatnya

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\|f\|_{C'}}{2^n} \right| &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|f\|_{C'}}{2^n} \\ &= \|f\|_{C'} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \\ &= \|f\|_{C'} \, 1 \\ &= \|f\|_{C'}. \end{aligned}$$

Di sisi lain, karena $f \in C'[a,b]$ sehingga f terbatas pada $[a,b]$ akibatnya $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\|f\|_{C'}}{2^n} \right| = \|f\|_{C'} < \infty$. Hal ini menunjukkan bahwa $\|f\|_{C'}^{\ell^1} = \left(\frac{\|f\|_{C'}}{2^n} \right) \in \ell^1$ untuk $f \in C'[a,b]$.

(b) Diberikan $f, g \in C'[a,b]$ dan $f = g$ berarti $f(t) = g(t),\ \forall t \in [a,b]$ akibatnya $\|f\|_{C'} = \|g\|_{C'}$. Hal ini juga berakibat $\left(\frac{\|f\|_{C'}}{2^n} \right) = \left(\frac{\|g\|_{C'}}{2^n} \right), \forall n \in \mathbb{N}$ sehingga $\|f\|_{C'}^{\ell^1} = \|g\|_{C'}^{\ell^1}$. Jadi, diperoleh untuk sebarang $f, g \in C'[a,b]$ dan $f = g$ berakibat $\|f\|_{C'}^{\ell^1} = \|g\|_{C'}^{\ell^1}$.

Dari (a) dan (b) dapat disimpulkan bahwa fungsi $\|.\|_{C'}^{\ell^1}$ merupakan fungsi yang *well-defined*. Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa fungsi $\|.\|_{C'}^{\ell^1}$ merupakan norma cone pada $C'[a,b]$. Menurut Definisi 2.3.9 akan ditunjukkan bahwa $\|.\|_{C'}^{\ell^1}$ memenuhi syarat-syarat (NC1)-(NC3).

(NC1) Akan ditunjukkan bahwa mbox$\|f\|_{C'}^{\ell 1} \succeq \bar{0}$ untuk semua $f \in C'[a,b]$. Telah ditunjukkan sebelumnya dalam Teorema 4.3.3 bahwa $\|.\|_{C'}$ adalah norma pada $C'[a,b]$ akibatnya $\frac{\|f\|_{C'}}{2^n} \geq 0$, untuk semua $n \in \mathbb{N}$. Hal ini berarti $\|f\|_{C'}^{\ell 1} \succeq \bar{0}$.

Selanjutya, diberikan $\|f\|_{C'}^{\ell 1} = \bar{0}$, $\forall f \in C'[a,b]$, artinya $\left(\frac{\|f\|_{C'}}{2^n}\right) = \bar{0}$ sehingga $\frac{\|f\|_{C'}}{2^n} = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Satu-satunya yang memenuhi adalah jika $\|f\|_{C'} = 0$. Karena $\|.\|_{C'}$ adalah norma pada $C'[a,b]$ sehingga diperoleh $f = \theta$ dengan θ adalah vektor nol pada $C'[a,b]$.

Sebaliknya, jika $f = \theta$ berarti $f(t) = 0$, $\forall t \in [a,b]$ sehingga $\|f\|_{C'} = 0$. Akibatnya

$$\|f\|_{C'}^{\ell 1} = \left(\frac{\|f\|_{C'}}{2^n}\right) = (0, 0, \ldots) = \bar{0}$$

untuk $n \in \mathbb{N}$.

(NC2) Ambil sebarang $f \in C'[a,b]$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$ berlaku

$$\begin{aligned}
\|\alpha f\|_{C'}^{\ell 1} &= \left(\frac{\|\alpha f\|_{C'}}{2^n}\right) \\
&= \left(\frac{|\alpha|\|f\|_{C'}}{2^n}\right) \\
&= |\alpha|\left(\frac{\|f\|_{C'}}{2^n}\right) \\
&= |\alpha|\|f\|_{C'}^{\ell 1}.
\end{aligned}$$

Jadi, diperoleh $\|\alpha f\|_{C'}^{\ell 1} = |\alpha|\|f\|_{C'}^{\ell 1}$.

(NC3) Berikutnya ambil sebarang $f_1, f_2 \in C'[a,b]$ akan ditunjukkan bahwa $\|f_1 + f_2\|_{C'}^{\ell 1} \preceq \|f_1\|_{C'}^{\ell 1} + \|f_2\|_{C'}^{\ell 1}$. Untuk menunjukknnya, akan lebih mudah jika terlebih dahulu ditunjukkan

$$\|f_1+f_2\|_{C'}^{\ell^1} \preceq \|f_1\|_{C'}^{\ell^1}+\|f_2\|_{C'}^{\ell^1} \Longleftrightarrow \|f_1+f_2\|_{C'} \leq \|f_1\|_{C'}+\|f_2\|_{C'}.$$

Diberikan $\|f_1 + f_2\|_{C'}^{\ell^1} \preceq \|f_1\|_{C'}^{\ell^1} + \|f_2\|_{C'}^{\ell^1}$ berarti $\|f_1\|_{C'}^{\ell^1} + \|f_2\|_{C'}^{\ell^1} - \|f_1 + f_2\|_{C'}^{\ell^1} \in P_{\ell^1}$. Dengan kata lain

$$\begin{aligned}
\|f_1\|_{C'}^{\ell^1} + \|f_2\|_{C'}^{\ell^1} - \|f_1 + f_2\|_{C'}^{\ell^1} &= \left(\frac{\|f_1\|_{C'}}{2^n}\right) + \left(\frac{\|f_2\|_{C'}}{2^n}\right) - \left(\frac{\|f_1 + f_2\|_{C'}}{2^n}\right) \\
&= \left(\frac{\|f_1\|_{C'} + \|f_2\|_{C'} - \|f_1 + f_2\|_{C'}}{2^n}\right) \in P_{\ell^1}.
\end{aligned}$$

Berarti

$$\frac{\|f_1\|_{C'} + \|f_2\|_{C'} - \|f_1 + f_2\|_{C'}}{2^n} \geq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Pertidaksamaan ini dipenuhi jika $\|f_1\|_{C'} + \|f_2\|_{C'} - \|f_1 + f_2\|_{C'} \geq 0$ sehingga diperoleh $\|f_1\|_{C'} + \|f_2\|_{C'} \geq \|f_1 + f_2\|_{C'}$ yang dapat ditulis ulang sebagai

$$\|f_1 + f_2\|_{C'} \leq \|f_1\|_{C'} + \|f_2\|_{C'}.$$

Sebaliknya, jika diberikan $\|f_1 + f_2\|_{C'} \leq \|f_1\|_{C'} + \|f_2\|_{C'}$ berarti $\|f_1\|_{C'} + \|f_2\|_{C'} - \|f_1 + f_2\|_{C'} \geq 0$. Akibatnya untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ berlaku $\frac{\|f_1\|_{C'}+\|f_2\|_{C'}-\|f_1+f_2\|_{C'}}{2^n} \geq 0$ dan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\|f_1\|_{C'} + \|f_2\|_{C'} - \|f_1 + f_2\|_{C'}}{2^n} \right| = \|f_1\|_{C'}+\|f_2\|_{C'}-\|f_1+f_2\|_{C'} \geq 0.$$

Ini berarti $\left(\frac{\|f_1\|_{C'}+\|f_2\|_{C'}-\|f_1+f_2\|_{C'}}{2^n}\right) \in P_{\ell^1}$. Dapat juga dituliskan dalam bentuk

$$\left(\frac{\|f_1\|_{C'}}{2^n}\right)+\left(\frac{\|f_2\|_{C'}}{2^n}\right)-\left(\frac{\|f_1 + f_2\|_{C'}}{2^n}\right) = \|f_1\|_{C'}^{\ell^1}+\|f_2\|_{C'}^{\ell^1}-\|f_1+f_2\|_{C'}^{\ell^1}.$$

Dengan demikian, $\|f_1\|_{C'}^{\ell 1} + \|f_2\|_{C'}^{\ell 1} - \|f_1 + f_2\|_{C'}^{\ell 1} \in P_{\ell^1}$ sehingga diperoleh

$$\|f_1 + f_2\|_{C'}^{\ell 1} \preceq \|f_1\|_{C'}^{\ell 1} + \|f_2\|_{C'}^{\ell 1}.$$

Jadi, $\|f_1 + f_2\|_{C'}^{\ell 1} \preceq \|f_1\|_{C'}^{\ell 1} + \|f_2\|_{C'}^{\ell 1}$.

Dengan demikian, syarat-syarat (NC1)-(NC3) terpenuhi. Jadi, fungsi $\|.\|_{C'}^{\ell 1}$ merupakan norma cone pada $C'[a, b]$. $\square$

Demikian pula, dapat diperoleh proposisi berikut ini.

Proposisi 4.6.2. *Diberikan ruang bernorma cone $C'[a, b]$ dan $f \in C'[a, b]$. Jika (f_n) adalah barisan di $C'[a, b]$ maka pernyataan berikut berlaku:*

(a) *Barisan (f_n) dalam ruang bernorma cone $C'[a, b]$ konvergen ke $f \in C'[a, b]$ jika dan hanya jika barisan (f_n) dalam ruang bernorma $C'[a, b]$ konvergen ke f.*

(b) *Barisan (f_n) adalah barisan Cauchy dalam ruang bernorma cone $C'[a, b]$ jika dan hanya jika barisan (f_n) adalah barisan Cauchy dalam ruang bernorma $C'[a, b]$.*

Bukti.

(a) Misalkan barisan (f_n) dalam ruang bernorma cone $(C'[a, b], \|.\|_{C'}^{\ell 1})$ konvergen ke f artinya untuk sebarang $\bar{c} \in \ell^1$ dengan $\bar{c} \gg \bar{0}$ terdapat bilangan asli N sedemikian hingga $\|f_n - f\|_{C'}^{\ell 1} \ll \bar{c}$ untuk semua $n \geq N$. Jadi, untuk $n \geq N$ berlaku $\left(\frac{\|f_n - f\|_{C'}}{2^k}\right) \ll (c_k)$ dengan $k \in \mathbb{N}$. Di lain pihak, untuk sebarang $\varepsilon > 0$ ambil suatu $\bar{c}_\varepsilon \in intP_{\ell^1}$ sedemikian hingga $\sum_{k=1}^{\infty} |c_{\varepsilon_k}| = \varepsilon$ akibatnya $\sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{\|f_n - f\|_{C'}}{2^k}\right| < \sum_{k=1}^{\infty} |c_{\varepsilon_k}| = \varepsilon$. Dengan kata lain, $\|f_n - f\|_{C'} < \varepsilon$. Hal ini berarti barisan (f_n) konvergen ke f di $(C'[a,b], \|.\|_{C'})$. Sebaliknya, jika diberikan barisan (f_n) dalam ruang bernorma $(C'[a,b], \|.\|_{C'})$ yang konvergen ke f artinya untuk sebarang $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli N sedemikian hingga untuk $n \geq N$ berlaku $\|f_n - f\|_{C'} < \varepsilon$. Di lain pihak, $\forall \bar{c} \in \ell^1, \bar{c} \gg \bar{0}$ dengan $\bar{c} = (c_k)$ untuk $k \in \mathbb{N}$ ambil suatu $\varepsilon_{\bar{c}}$ sedemikian hingga $\frac{\|f_n - f\|_{C'}}{2^k} < c_k$ untuk setiap $k \in \mathbb{N}$. Dengan demikian untuk $n \geq N$ berlaku $\frac{\|f_n - f\|_{C'}}{2^k} < c_k$ untuk setiap $k \in \mathbb{N}$. Karena $\bar{c} \gg \bar{0}$ berarti $\bar{c} \in intP_{\ell^1}$ sehingga $c_k > 0, \forall k \in \mathbb{N}$. Demikian pula, $\|f_n - f\|_{C'} \geq 0$ berakibat $\frac{\|f_n - f\|_{C'}}{2^k} \geq 0$ dan $c_k - \frac{\|f_n - f\|_{C'}}{2^k} > 0$ untuk setiap $k \in \mathbb{N}$. Ini berarti $(c_k) - \left(\frac{\|f_n - f\|_{C'}}{2^k}\right) \in intP_{\ell^1}$ atau dapat dituliskan $\bar{c} - \|f_n - f\|_{C'}^{\ell^1} \in intP_{\ell^1}$. Jadi, $\|f_n - f\|_{C'}^{\ell^1} \ll \bar{c}$.

(b) Misalkan barisan (f_n) adalah barisan Cauchy dalam ruang bernorma cone $(C'[a,b], \|.\|_{C'}^{\ell^1})$ artinya untuk sebarang $\bar{c} \in \ell^1$ dengan $\bar{c} \gg \bar{0}$ terdapat bilangan asli N sedemikian hingga $\|f_n - f_m\|_{C'}^{\ell^1} \ll \bar{c}$ untuk semua $n, m \geq N$. Jadi, untuk $n, m \geq N$ berlaku $\left(\frac{\|f_n - f_m\|_{C'}}{2^k}\right) \ll (c_k)$ dengan $k \in \mathbb{N}$. Di lain pihak, untuk sebarang $\varepsilon > 0$ ambil suatu $\bar{c}_\varepsilon \in intP_{\ell^1}$ sedemikian hingga $\sum_{k=1}^{\infty} |c_{\varepsilon_k}| = \varepsilon$ akibatnya $\sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{\|f_n - f_m\|_{C'}}{2^k}\right| < \sum_{k=1}^{\infty} |c_{\varepsilon_k}| = \varepsilon$. Dengan kata lain, $\|f_n - f_m\|_{C'} < \varepsilon$. Hal ini berarti barisan (f_n) adalah barisan Cauchy dalam ruang bernorma $(C'[a,b], \|.\|_{C'})$. Sebaliknya, jika diberikan barisan (f_n) adalah barisan Cauchy dalam ruang bernorma $(C'[a,b], \|.\|_{C'})$ artinya untuk sebarang $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli N sedemikian hingga untuk $n, m \geq N$ berlaku $\|f_n - f_m\|_{C'} < \varepsilon$. Di lain pihak, $\forall \bar{c} \in \ell^1$, $\bar{c} \gg \bar{0}$ dengan

$\bar{c} = (c_k)$ untuk $k \in \mathbb{N}$ ambil suatu $\varepsilon_{\bar{c}}$ sedemikian hingga $\frac{\|f_n - f_m\|_{C'}}{2^k} < c_k$ untuk setiap $k \in \mathbb{N}$. Dengan demikian untuk $n, m \geq N$ berlaku $\frac{\|f_n - f_m\|_{C'}}{2^k} < c_k$ untuk setiap $k \in \mathbb{N}$. Karena $\bar{c} \gg \bar{0}$ berarti $\bar{c} \in intP_{\ell^1}$ sehingga $c_k > 0, \forall k \in \mathbb{N}$. Demikian pula, $\|f_n - f_m\|_{C'} \geq 0$ berakibat $\frac{\|f_n - f_m\|_{C'}}{2^k} \geq 0$ dan $c_k - \frac{\|f_n - f_m\|_{C'}}{2^k} > 0$ untuk setiap $k \in \mathbb{N}$. Ini berarti $(c_k) - \left(\frac{\|f_n - f_m\|_{C'}}{2^k}\right) \in intP_{\ell^1}$ atau dapat dituliskan $\bar{c} - \|f_n - f_m\|_{C'}^{\ell^1} \in intP_{\ell^1}$. Jadi, $\|f_n - f_m\|_{C'}^{\ell^1} \ll \bar{c}$.

□

Contoh 4.6.3. Diberikan $(f_n) \subseteq (C'[a,b], \|.\|_{C'}^{\ell^1})$ dengan $f_n(t) := \frac{t^2+nt}{n} + t, \forall t \in [a,b] \subseteq \mathbb{R}$. Barisan (f_n) konvergen ke $f(t) := 2t$ untuk $t \in [a,b]$ dan merupakan barisan Cauchy.

Bukti. Akan ditunjukkan bahwa $\frac{t^2+nt}{n} + t \to 2t$ untuk $t \in [a,b]$ dalam ruang bernorma cone $C'[a,b]$ dengan menggunakan Proposisi 4.6.2. Sebelumnya akan ditunjukkan bahwa $\frac{t^2+nt}{n} + t \to 2t$ dalam ruang bernorma $C'[a,b]$.

$$
\begin{aligned}
\left\| \frac{t^2+nt}{n} + t - 2t \right\|_{C'} &= \left\| \frac{t^2+nt}{n} - t \right\|_{C'} \\
&= \left\| \frac{t^2+nt-nt}{n} \right\|_{C'} \\
&= \left\| \frac{t^2}{n} \right\|_{C'} \\
&= \sup_{t\in[a,b]} \left| \frac{t^2}{n} \right| + \sup_{t\in[a,b]} \left| \frac{2t}{n} \right| \\
&= \left| \frac{b^2}{n} \right| + \left| \frac{2b}{n} \right|.
\end{aligned}
$$

Untuk n yang semakin besar diperoleh $\frac{b^2+2|b|}{n}$. Kemudian ambil sebarang $\varepsilon > 0$ dan pilih $N > \frac{b^2+2|b|}{\varepsilon}$ sehingga untuk semua $n \geq N$ diperoleh

$$\left\| \frac{t^2+nt}{n} + t - 2t \right\|_{C'} \leq \frac{b^2+2|b|}{N} < \varepsilon.$$

Karena berlaku untuk sebarang $\varepsilon > 0$ maka dapat disimpulkan bahwa $\left(\frac{t^2+nt}{n} + t\right)$ konvergen ke $2t$ untuk semua $t \in [a,b]$. Demikian pula, karena barisan $\left(\frac{t^2+nt}{n} + t\right)$ konvergen maka menurut Teorema 2.2.6 barisan $\left(\frac{t^2+nt}{n} + t\right)$ merupakan barisan Cauchy dalam ruang bernorma $C'[a,b]$. Berdasarkan Proposisi 4.6.2, barisan $\left(\frac{t^2+nt}{n} + t\right)$ juga konvergen ke $2t$ dalam ruang bernorma cone $C'[a,b]$ untuk $t \in [a,b]$. Demikian pula, menurut Teorema 2.3.14 barisan $\left(\frac{t^2+nt}{n} + t\right)$ merupakan barisan Cauchy dalam ruang bernorma cone $C'[a,b]$. $\square$

Berdasarkan Proposisi 4.6.2 dapat diperoleh suatu sifat berikut ini.

Akibat 4.6.4. *Ruang bernorma cone $C'[a,b]$ bernilai ℓ^1 merupakan ruang Banach cone.*

Bukti. Hal ini merupakan akibat langsung dari Proposisi 4.6.2, didapat bahwa sebarang barisan Cauchy (f_n) dalam ruang bernorma $(C'[a,b], \|.\|_{C'})$ merupakan barisan Cauchy di $(C'[a,b], \|.\|_{C'}^{\ell^1})$. Karena $(C'[a,b], \|.\|_{C'})$ merupakan ruang Banach akibatnya barisan (f_n) konvergen di $(C'[a,b], \|.\|_{C'})$ yang juga mengakibatkan barisan (f_n) konvergen di $(C'[a,b], \|.\|_{C'}^{\ell^1})$. Oleh karena itu, ruang bernorma cone $(C'[a,b], \|.\|_{C'}^{\ell^1})$ adalah ruang Banach cone. $\square$

Sub bab berikutnya adalah pembahasan sifat-sifat operator linear pada ruang ruang bernorma cone $C'[a,b]$ ke $C[a,b]$.

4.7 Operator Linear Kontinu Terbatas pada ruang bernorma cone $C'[a,b]$ ke $C[a,b]$

Ruang bernorma cone yang dipilih sebagai domain dari operator linear yang diselidiki sifat kekontinuan dan keterbatasannya adalah ruang bernorma cone $C'[a,b]$ sedangkan kodomain dari operator linearnya adalah ruang bernorma cone $C[a,b]$. Pada bagian ini akan dikonstruksi suatu operator linear yang kontinu dan terbatas pada ruang bernorma cone $C'[a,b]$ ke $C[a,b]$. Pembahasan lebih lanjut, tercantum dalam Proposisi berikut.

Proposisi 4.7.1. *Diberikan ruang bernorma cone $(C'[a,b], \|.\|_{C'}^{\ell 1})$ dan $(C[a,b], \|.\|_{C}^{\ell 1})$ serta sebarang fungsi $\mathcal{H} \in C[a,b]$ tetap. Misalkan $T_{\mathcal{H}}$ adalah operator dengan $T_{\mathcal{H}} : C'[a,b] \to C[a,b]$ yang didefinisikan*

$$T_{\mathcal{H}}(f) = \mathcal{H}f' \quad , \forall f \in C'[a,b].$$

Operator $T_{\mathcal{H}}$ merupakan operator linear kontinu pada ruang bernorma cone $C'[a,b]$ dan terbatas cone.

Bukti. Terlebih dahulu akan ditunjukkan bahwa $T_{\mathcal{H}}$ adalah operator linear. Ambil sebarang $f, g \in (C'[a,b], \|.\|_{C'}^{\ell 1})$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$, menurut Definisi 2.4.1 akan ditunjukkan bahwa $T_{\mathcal{H}}$ memenuhi (OL1) dan (OL2).

(OL1)

$$\begin{aligned} T_{\mathcal{H}}(f+g) &= \mathcal{H}(f+g)' \\ &= \mathcal{H}(f'+g') \\ &= \mathcal{H}f' + \mathcal{H}g' \\ &= T_{\mathcal{H}}(f) + T_{\mathcal{H}}(g). \end{aligned}$$

(OL2)

$$\begin{aligned} T_{\mathcal{H}}(\alpha f) &= \mathcal{H}(\alpha f)' \\ &= \mathcal{H}(\alpha f') \\ &= \alpha(\mathcal{H}f') \\ &= \alpha T_{\mathcal{H}}(f). \end{aligned}$$

Dari (OL1) dan (OL2) dapat dikatakan bahwa $T_{\mathcal{H}}(f) = f'$, $\forall f \in C'[a,b]$ merupakan operator linear.

Berikutnya akan ditunjukkan bahwa $T_{\mathcal{H}}$ adalah operator linear yang kontinu pada $C'[a,b]$. Diberikan sebarang $c \in \ell^1$ dengan $c \gg \bar{0}$, akan dicari $t \in \ell^1$, $t \gg \bar{0}$ sedemikian hingga untuk $f, g \in C'[a,b]$ dan $\|f-g\|_{C'}^{\ell^1} \ll t$ berlaku $\|T_{\mathcal{H}}(f) - T_{\mathcal{H}}(g)\|_{C}^{\ell^1} \ll c$.

Di sisi lain

$$\begin{aligned}
\|T_{\mathcal{H}}(f) - T_{\mathcal{H}}(g)\|_{C}^{\ell^1} &= \|T_{\mathcal{H}}(f-g)\|_{C}^{\ell^1} \\
&= \|\mathcal{H}(f-g)'\|_{C}^{\ell^1} \\
&= \|\mathcal{H}(f'-g')\|_{C}^{\ell^1} \\
&= \left(\frac{\|\mathcal{H}(f'-g')\|_\infty}{2^n}\right) \\
&= \left(\frac{\sup_{t\in[a,b]} |\mathcal{H}(t)(f'(t)-g'(t))|}{2^n}\right).
\end{aligned}$$

Karena

$$\sup_{t\in[a,b]} |\mathcal{H}(t)(f'(t)-g'(t))| \leq \sup_{t\in[a,b]} |\mathcal{H}(t)| \sup_{t\in[a,b]} |(f'(t)-g'(t))|$$

atau dengan kata lain

$$\|\mathcal{H}(f'-g')\|_\infty \leq \|\mathcal{H}\|_\infty \|f'-g'\|_\infty.$$

Dengan demikian untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ berlaku

$$\left(\frac{\|\mathcal{H}(f'-g')\|_\infty}{2^n}\right) \leq \|\mathcal{H}\|_\infty \left(\frac{\|f'-g'\|_\infty}{2^n}\right).$$

Ini berarti

$$\|\mathcal{H}\|_\infty \left(\frac{\|f'-g'\|_\infty}{2^n}\right) - \left(\frac{\|\mathcal{H}(f'-g')\|_\infty}{2^n}\right) \geq 0,$$

dengan kata lain

$$\|\mathcal{H}\|_\infty \|f' - g'\|_C^{\ell 1} - \|\mathcal{H}(f' - g')\|_C^{\ell 1} \geq 0.$$

Karena $\|\mathcal{H}\|_\infty \|f' - g'\|_C^{\ell 1} - \|\mathcal{H}(f' - g')\|_C^{\ell 1} \in \ell^1$ dan $\|\mathcal{H}\|_\infty \|f' - g'\|_C^{\ell 1} - \|\mathcal{H}(f' - g')\|_C^{\ell 1} \geq 0$ akibatnya $\|\mathcal{H}\|_\infty \|f' - g'\|_C^{\ell 1} - \|\mathcal{H}(f' - g')\|_C^{\ell 1} \in P_{\ell^1}$. Sesuai dengan notasi yang digunakan dalam tugas akhir ini, dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\|\mathcal{H}(f' - g')\|_C^{\ell 1} \preceq \|\mathcal{H}\|_\infty \|f' - g'\|_C^{\ell 1}. \tag{4.9}$$

Kemudian akan ditunjukkan bahwa $\|f' - g'\|_C^{\ell 1} \preceq \|f - g\|_{C'}^{\ell 1}$. Berdasarkan

$$\sup_{t\in[a,b]} |f('t) - g'(t)| \leq \sup_{t\in[a,b]} |f(t) - g(t)| + \sup_{t\in[a,b]} |f('t) - g'(t)|.$$

maka untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ berlaku

$$\left(\frac{\sup_{t\in[a,b]} |f'(t) - g'(t)|}{2^n}\right) \leq \left(\frac{\sup_{t\in[a,b]} |f(t) - g(t)| + \sup_{t\in[a,b]} |f('t) - g'(t)|}{2^n}\right).$$

Ini berarti

$$\left(\frac{\sup_{t\in[a,b]} |f(t) - g(t)| + \sup_{t\in[a,b]} |f('t) - g'(t)|}{2^n}\right) - \left(\frac{\sup_{t\in[a,b]} |f'(t) - g'(t)|}{2^n}\right) \geq 0,$$

dengan kata lain

$$\|f - g\|_{C'}^{\ell 1} - \|f' - g'\|_C^{\ell 1} \geq 0.$$

Karena $\|f - g\|_{C'}^{\ell 1} - \|f' - g'\|_C^{\ell 1} \in \ell^1$ dan $\|f - g\|_{C'}^{\ell 1} - \|f' - g'\|_C^{\ell 1} \geq 0$ akibatnya $\|f - g\|_{C'}^{\ell 1} - \|f' - g'\|_C^{\ell 1} \in P_{\ell^1}$. Hal ini juga dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\|f' - g'\|_C^{\ell 1} \preceq \|f - g\|_{C'}^{\ell 1}. \tag{4.10}$$

Dari (4.9), (4.10), dan Lemma 2.3.5 (b) diperoleh

$$\begin{aligned}
\|T_{\mathcal{H}}(f) - T_{\mathcal{H}}(g)\|_C^{\ell^1} &= \|\mathcal{H}(f' - g')\|_C^{\ell^1} \\
&\preceq \|\mathcal{H}\|_\infty \|f' - g'\|_C^{\ell^1} \\
&\preceq \|\mathcal{H}\|_\infty \|f - g\|_{C'}^{\ell^1} \\
&\ll t.
\end{aligned}$$

Jadi, dapat dipilih $t := \frac{c}{\|\mathcal{H}\|_\infty}$ sedemikian hingga berlaku $\|T_{\mathcal{H}}(f) - T_{\mathcal{H}}(g)\|_C^{\ell^1} \ll c$ untuk $f, g \in C'[a,b]$. Menurut Definsi 2.4.3 (c), operator linear $T_{\mathcal{H}}$ kontinu seragam pada $(C'[a,b], \|.\|_{C'}^{\ell^1})$. Berdasarkan teorema 2.4.4, operator linear $T_{\mathcal{H}}$ kontinu pada $(C'[a,b], \|.\|_{C'}^{\ell^1})$.

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa $T_{\mathcal{H}}$ terbatas cone. Berdasarkan teorema 2.4.4 diperoleh bahwa $T_{\mathcal{H}}$ kontinu di $\theta \in C'[a,b]$ sehingga untuk suatu $t \in \ell^1$ dengan $t \gg \bar{0}$ dapat dipilih $w \in \ell^1, w \succeq \bar{0}$ dengan $w := \|\mathcal{H}\|_\infty t$ sedemikian hingga $\forall f \in C'[a,b]$ dengan $\|f - \theta\|_{C'}^{\ell^1} = \|f\|_{C'}^{\ell^1}$ berlaku

$$\begin{aligned}
\|T_{\mathcal{H}}(f) - T_{\mathcal{H}}(\theta)\|_C^{\ell^1} &= \|T_{\mathcal{H}}(f) - \theta\|_C^{\ell^1} \\
&= \|T_{\mathcal{H}}(f)\|_C^{\ell^1} \\
&= \|\mathcal{H}f'\|_C^{\ell^1} \\
&\preceq \|\mathcal{H}\|_\infty \|f'\|_C^{\ell^1} \\
&\preceq \|\mathcal{H}\|_\infty \|f\|_{C'}^{\ell^1} \\
&\ll \|\mathcal{H}\|_\infty t.
\end{aligned}$$

Menurut Lemma 2.3.3 (a), didapat bahwa $\|\mathcal{H}\|_\infty \|f\|_{C'}^{\ell^1} \ll \|\mathcal{H}\|_\infty t$ berakibat $\|\mathcal{H}\|_\infty \|f\|_{C'}^{\ell^1} \preceq t = w$. Dengan demikian diperoleh $\|T_{\mathcal{H}}(f) - T_{\mathcal{H}}(\theta)\|_C^{\ell^1} \preceq w$. Hal ini menunjukkan bahwa $T_{\mathcal{H}}$ terbatas cone. $\square$

Sebagai catatan, sama halnya dengan fungsi norma cone bahwa operator linear kontinu terbatas pada ruang bernorma cone juga tidak tunggal. Berikut ini adalah contoh dari Proposisi 4.7.1.

Contoh 4.7.2. Diberikan fungsi polinomial $p(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n$ dengan $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ dan $t \in [a, b]$. Misalkan $T_{\mathcal{H}} : (C'[a, b], \|.\|_{C'}^{\ell^1}) \to (C[a, b], \|.\|_{C}^{\ell^1})$ adalah operator linear yang didefinisikan

$$T_{\mathcal{H}}(f(t)) = p(t)f'(t), \quad \forall f(t) \in C'[a, b].$$

Operator linear $T_{\mathcal{H}}$ merupakan operator linear kontinu dan terbatas cone pada $(C'[a, b], \|.\|_{C'}^{\ell^1})$. Hal ini dikarenakan $p(t)$ merupakan fungsi yang kontinu pada $[a, b]$.

Selanjutnya akan diselidiki sifat-sifat ruang operator linear terbatas pada ruang bernorma cone $C'[a, b]$ bernilai $C[a, b]$.

4.8 Ruang Operator Linear Terbatas Cone pada ruang bernorma cone $C'[a, b]$ ke $C[a, b]$

Sifat-sifat ruang operator linear terbatas cone yang akan diselidiki pada tugas akhir ini diantaranya ruang operator linear terbatas cone pada ruang bernorma $C'[a, b]$ bernilai $C[a, b]$ merupakan ruang bernorma cone serta ruang operator linear terbatas cone pada ruang bernorma cone $C'[a, b]$ ke $C[a, b]$ merupakan ruang Banach cone.

Proposisi 4.8.1. *Diberikan* $\widetilde{B}(C'[a, b], C[a, b])$ *adalah himpunan semua operator linear terbatas cone dari ruang bernorma cone* $(C'[a, b], \|.\|_{C'}^{\ell^1})$ *ke ruang bernorma cone* $(C[a, b], \|.\|)_{C}^{\ell^1})$. *Didefinisikan suatu fungsi* $\|.\|_{\widetilde{B}}^{\ell^1} : \widetilde{B}(C'[a, b], C[a, b]) \to \ell^1$ *dengan*

$$\|T\|_{\widetilde{B}}^{\ell^1} := \sup\{\|T(f)\|_{C}^{\ell^1} : f \in C'[a, b], \|f\|_{C'}^{\ell^1} \ll t^*\}$$

untuk setiap $T \in \widetilde{B}(C[a,b], C[a,b])$. *Fungsi* $\|.\|_{\widetilde{B}}^{\ell^1}$ *merupakan norma cone untuk* $\widetilde{B}(C'[a,b], C[a,b])$.

Bukti. Terlebih dahulu akan ditunjukkan bahwa $\widetilde{B}(C'[a,b], C[a,b])$ adalah subruang linear dari $L(C'[a,b], C[a,b])$. Himpunan $L(C'[a,b], C[a,b])$ adalah himpunan dari semua operator linear dari ruang vektor $C'[a,b]$ ke ruang vektor $C[a,b]$ yang merupakan suatu kasus untuk $L(V,W)$ dengan $V = C'[a,b]$ dan $W = C[a,b]$. Dalam hal ini $L(C'[a,b], C[a,b])$ merupakan ruang vektor atas $\mathbb{R}$ dengan operasi jumlahan vektor dan perkalian dengan skalar sebagaimana pada ruang vektor $L(V,W)$ secara umum.

Jelas bahwa $\widetilde{B}(C'[a,b], C[a,b]) \subseteq L(C'[a,b], C[a,b])$ dan $\widetilde{B}(C'[a,b], C[a,b]) \neq \emptyset$ sebab dapat dipilih $\Theta \in \widetilde{B}(C'[a,b], C[a,b])$ dengan $\Theta(f) = \theta, \forall f \in C'[a,b]$. Selanjutnya, ambil sebarang $T_1, T_2 \in \widetilde{B}(C'[a,b], C[a,b])$ dan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sehingga T_1, T_2 terbatas cone, berarti $\forall f \in C'[a,b]$ dengan $\|f\|_{C'}^{\ell^1} \ll t^*$ terdapat $t_1, t_2 \in \ell^1, t_1, t_2 \succeq \bar{0}$ sedemikian hingga $\|T_1(f)\|_C^{\ell^1} \preceq t_1$ dan $\|T_2(f)\|_C^{\ell^1} \preceq t_2$. Berdasarkan sifat norma cone diperoleh

$$\begin{aligned}
\|\alpha T_1 + \beta T_2\|_C^{\ell^1} &= \|(\alpha T_1 + \beta T_2)(f)\|_C^{\ell^1} \\
&= \|\alpha T_1(f) + \beta T_2(f)\|_C^{\ell^1} \\
&\preceq \|\alpha T_1(f)\|_C^{\ell^1} + \|\beta T_2(f)\|_C^{\ell^1} \\
&\preceq |\alpha| t_1 + |\beta| t_2.
\end{aligned}$$

Jadi, $\forall f \in C'[a,b]$ dengan $\|f\|_{C'}^{\ell^1} \ll t^*$ terdapat $t \in \ell^1$, $t \gg \bar{0}$ dengan $t = |\alpha| t_1 + |\beta| t_2$ sedemikian hingga $\|\alpha T_1 + \beta T_2\|_C^{\ell^1} \preceq t$. Hal ini berarti $\alpha T_1 + \beta T_2$ terbatas cone. Dengan demikian, $\alpha T_1 + \beta T_2 \in \widetilde{B}(C'[a,b], C[a,b])$. Jadi, himpunan $\widetilde{B}(C'[a,b], C[a,b])$ adalah subruang linear dari $L(C'[a,b], C[a,b])$ sehingga $\widetilde{B}(C'[a,b], C[a,b])$ merupakan ruang vektor atas $\mathbb{R}$.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $\|.\|_{\widetilde{B}}^{\ell 1}$ merupakan norma cone pada $\widetilde{B}(C'[a,b], C[a,b])$.

(NC1) Jelas bahwa $\|T(f)\|_C^{\ell 1} \succeq \bar{0}$ sebab $\|.\|_C^{\ell 1}$ merupakan norma cone pada $C[a,b]$ akibatnya $\sup\{\|T(f)\|_C^{\ell 1} : f \in C'[a,b], \|f\|_{C'}^{\ell 1} \ll t^*\} \succeq \bar{0}$. Dengan kata lain $\|T\|_{\widetilde{B}}^{\ell 1} \succeq \bar{0}$. Berikutnya jika diberikan $\|T\|_{\widetilde{B}}^{\ell 1} = \bar{0}$, berarti $\sup\{\|T(f)\|_C^{\ell 1} : f \in C'[a,b], \|f\|_{C'}^{\ell 1} \ll t^*\} = \bar{0}$ sehingga $\|T(f)\|_C^{\ell 1} = \bar{0}$ untuk $f \in C'[a,b]$ dengan $\|f\|_C^{\ell 1} \ll t^*$. Menurut Lemma 2.4.2, diperoleh $T(f) = \theta$, $\forall f \in C'[a,b]$. Hal ini juga berarti $T(f) = \Theta(f)$, $\forall f \in C'[a,b]$. Dengan kata lain $T = \Theta$. Sebaliknya, jika $T = \Theta$ artinya $T(f) = \Theta(f)$, $\forall f \in C'[a,b]$ sedemikian hingga jika $\|f\|_{C'}^{\ell 1} \ll t^*$ berakibat $\|T(f)\|_C^{\ell 1} = \|\Theta(f)\|_C^{\ell 1} = \|\theta\|_C^{\ell 1} = \bar{0}$. Hal ini juga berakibat $\sup\{\|T(f)\|_C^{\ell 1} : f \in C'[a,b], \|f\|_{C'}^{\ell 1} \ll t^*\} = \bar{0}$. Dengan kata lain $\|T\|_{\widetilde{B}}^{\ell 1} = \bar{0}$.

(NC2) Berdasarkan sifat norma cone dan sifat supremum diperoleh

$$\begin{aligned}
\|\alpha T\|_{\widetilde{B}}^{\ell 1} &= \sup\{\|\alpha T(f)\|_C^{\ell 1} : f \in C'[a,b], \\
&\qquad \|f\|_{C'}^{\ell 1} \ll t^*\} \\
&= \sup\{|\alpha| \|T(f)\|_C^{\ell 1} : f \in C'[a,b], \\
&\qquad \|f\|_{C'}^{\ell 1} \ll t^*\} \\
&= |\alpha| \sup\{\|T(f)\|_C^{\ell 1} : f \in C'[a,b], \\
&\qquad \|f\|_{C'}^{\ell 1} \ll t^*\} \\
&= |\alpha| \|T\|_{\widetilde{B}}^{\ell 1}.
\end{aligned}$$

(NC3) Demikian pula

$$\begin{aligned}
\|T_1+T_2\|_{\widetilde{B}}^{\ell^1} &= \sup\{\|(T_1+T_2)(f)\|_C^{\ell^1} : f\in C'[a,b],\\
&\qquad \|f\|_{C'}^{\ell^1} \ll t^*\}\\
&= \sup\{\|T_1(f)+T_2(f)\|_C^{\ell^1} : f\in C'[a,b],\\
&\qquad \|f\|_{C'}^{\ell^1} \ll t^*\}\\
&\preceq \sup\{\|T_1(f)\|_C^{\ell^1} + \|T_2(f)\|_C^{\ell^1} :\\
&\qquad f\in C'[a,b], \|f\|_{C'}^{\ell^1} \ll t^*\}\\
&\preceq \sup\{\|T_1(f)\|_C^{\ell^1} : f\in C'[a,b],\\
&\qquad \|f\|_{C'}^{\ell^1} \ll t^*\} + \sup\{\|T_2(f)\|_C^{\ell^1} :\\
&\qquad f\in C'[a,b], \|f\|_{C'}^{\ell^1} \ll t^*\}\\
&= \|T_1\|_{\widetilde{B}}^{\ell^1} + \|T_2\|_{\widetilde{B}}^{\ell^1}.
\end{aligned}$$

Dengan demikian syarat-syarat (NC1)-(NC3) terpenuhi untuk $\|.\|_{\widetilde{B}}^{\ell^1}$. Jadi, himpunan $\widetilde{B}(C'[a,b],C[a,b])$ merupakan ruang bernorma cone dengan norma cone $\|.\|_{\widetilde{B}}^{\ell^1}$.

$\square$

Selanjutnya dapat ditunjukkan bahwa $\widetilde{B}(C'[a,b],C[a,b])$ merupakan ruang Banach cone dengan norma $\|.\|_{\widetilde{B}}^{\ell^1}$.

Proposisi 4.8.2. *Ruang bernorma $\widetilde{B}(C'[a,b],C[a,b])$ merupakan ruang Banach cone dengan norma $\|.\|_{\widetilde{B}}^{\ell^1}$.*

Bukti. Misalkan (T_n) adalah sebarang barisan Cauchy dalam ruang bernorma cone $\widetilde{B}(C'[a,b],C[a,b])$, berarti $\forall c\in\ell^1$, $c\gg\bar{0}$, $\exists N\in\mathbb{N}$ sedemikian hingga $\forall n,m\geq N$ berlaku

$$\begin{aligned}
\|T_n-T_m\|_{\widetilde{B}}^{\ell^1} &= \sup\{\|T_n(f)-T_m(f)\|_C^{\ell^1} : f\in C'[a,b],\\
&\qquad \|f\| \ll t^*\}\\
&\ll c.
\end{aligned}$$

Di sisi lain, untuk setiap $n, m \in \mathbb{N}$ berlaku

$$\|T_n(f) - T_m(f)\|_C^{\ell^1} \preceq \sup\{\|T_n(f) - T_m(f)\|_C^{\ell^1} : f \in C'[a,b],$$
$$\|f\|_{C'}^{\ell^1} \ll t^*\}$$

sehingga $\forall n, m \geq N$ diperoleh

$$\|T_n(f) - T_m(f)\|_C^{\ell^1} \ll c \qquad , \forall f \in C'[a,b]. \tag{4.11}$$

Ini berarti untuk sebarang $f \in C'[a,b]$, barisan $(T_n(f))$ adalah barisan Cauchy di $C[a,b]$. Karena $C[a,b]$ ruang Banach cone akibatnya $(T_n(f))$ konvergen ke suatu titik di $C[a,b]$, misalkan $T_n(f) \to T(f)$ saat $n \to \infty$. Akan ditunjukkan $T \in \widetilde{B}(C'[a,b], C[a,b])$. Karena $T_n \in \widetilde{B}(C'[a,b], C[a,b]), \forall n \in \mathbb{N}$, berdasarkan Teorema 2.3.17 (a) dan (b), $\forall f, h \in C'[a,b]$ dan $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ didapat

$$\begin{aligned}
T(\alpha f + \beta h) &= \lim_{n\to\infty} T_n(\alpha f + \beta h) \\
&= \lim_{n\to\infty} (\alpha T_n(f) + \beta T_n(h)) \\
&= \lim_{n\to\infty} \alpha T_n(f) + \lim_{n\to\infty} \beta T_n(h) \\
&= \alpha T(f) + \beta T(h)
\end{aligned}$$

Jadi T adalah operator linear dari $C'[a,b]$ ke $C[a,b]$. Di samping itu, karena T_n terbatas cone $\forall n \in \mathbb{N}$, maka $\exists t \in \ell^1$, $t \succeq \bar{0}$ sedemikian hingga $\|T_n(f)\|_C^{\ell^1} \preceq t$, $\forall f \in C'[a,b]$ dengan $\|f\|_{C'}^{\ell^1} \ll t^*$. Menurut Akibat 2.3.7 dan Teorema 2.3.16, untuk setiap $f \in C'[a,b]$ dengan $\|f\|_{C'}^{\ell^1} \ll t^*$, diperoleh

$$\begin{aligned}
\|T(f)\|_C^{\ell^1} &= \|\lim_{n\to\infty} T_n(f)\|_C^{\ell^1} \\
&= \lim_{n\to\infty} \|T_n(f)\|_C^{\ell^1} \\
&\preceq t
\end{aligned}$$

Ini berarti T terbatas cone. Dengan demikian $T \in \widetilde{B}(C'[a,b], C[a,b])$. Selanjutnya, akan ditunjukkan $T_n \to T$. Karena (4.11) terpenuhi untuk setiap $m \geq N$ dan $T_m(f) \to T(f)$ saat $m \to \infty$, maka untuk setiap $n \geq N$ diperoleh

$$\begin{aligned} \|T_n(f) - T(f)\|_C^{\ell^1} &= \|T_n(f) - \lim_{m\to\infty} T_m(f)\|_C^{\ell^1} \\ &= \lim_{m\to\infty} \|T_n(f) - T_m(f)\|_C^{\ell^1} \\ &\ll c. \end{aligned}$$

Dengan mengambil $f \in C'[a,b], \|f\|_{C'}^{\ell^1} \ll t^*$ dan supremum dari $\|T_n(f) - T(f)\|_C^{\ell^1}$ diperoleh

$$\|T_n - T\|_{\widetilde{B}}^{\ell^1} \ll c.$$

Jadi, $T_n \to T$ saat $n \to \infty$. Hal ini menunjukkan bahwa $\widetilde{B}(C'[a,b], C[a,b])$ adalah ruang Banach cone. $\square$

BAB V
PENUTUP

Pada bab ini, diberikan kesimpulan yang diperoleh dari tugas akhir ini serta saran untuk penelitian selanjutnya.

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan analisis dan pembahasan pada bab sebelumnya, dapat disimpulkan beberapa hal berikut:

a. Ruang $(C'[a,b], \|.\|_{C'})$ dan ruang $(C[a,b], \|.\|_{\infty})$ merupakan ruang bernorma cone bernilai ℓ^1 dengan norma cone masing-masing adalah

$$\|f\|_{C'}^{\ell^1} := \left(\frac{\|f\|_{C'}}{2}, \frac{\|f\|_{C'}}{2^2}, \ldots\right) = \left(\frac{\|f\|_{C'}}{2^n}\right)$$

dan

$$\|g\|_{C}^{\ell^1} := \left(\frac{\|g\|_{\infty}}{2}, \frac{\|g\|_{\infty}}{2^2}, \ldots\right) = \left(\frac{\|g\|_{\infty}}{2^n}\right)$$

untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dengan $f \in C'[a,b]$ dan $g \in C[a,b]$.

b. Ruang bernorma cone $(C'[a,b], \|.\|_{C'}^{\ell^1})$ dan $(C[a,b], \|.\|_{C}^{\ell^1})$ merupakan ruang Banach cone.

c. Untuk sebarang fungsi $\mathcal{H} \in C[a,b]$ tetap dan operator linear $T_{\mathcal{H}} : C'[a,b] \to C[a,b]$ dengan

$$T_{\mathcal{H}}(f) = \mathcal{H}f', \quad \forall f \in C'[a,b].$$

$T_{\mathcal{H}}$ merupakan operator linear kontinu terbatas cone pada ruang bernorma cone $C'[a,b]$ ke $C[a,b]$.

d. Ruang operator linear terbatas cone $\widetilde{B}(C'[a,b], C[a,b])$ merupakan ruang bernorma cone dengan fungsi norma cone $\|.\|_{\widetilde{B}}^{\ell^1} : \widetilde{B}(C'[a,b], C[a,b]) \to \ell^1$ yang didefinisikan

$$\|T\|_{\widetilde{B}}^{\ell^1} = \sup\{\|T(f)\|_{C}^{\ell^1} : f \in C'[a,b], \|f\|_{C'}^{\ell^1} \ll t^*\}$$

untuk setiap $T \in \widetilde{B}(C'[a,b), C[a,b])$ dan suatu $t^* \in \ell^1$ dengan $t \gg \bar{0}$.

e. Ruang $\widetilde{B}(C'[a,b], C[a,b])$ merupakan ruang Banach cone.

5.2 Saran

Pada tugas akhir ini belum dibahas mengenai norma ekivalen pada ruang bernorma cone. Oleh karena itu, untuk penelitian selanjutnya perlu dikaji mengenai norma ekivalen pada ruang bernorma cone atau dapat pula diteliti mengenai ruang bernoma cone yang lainnya.